Busy Beavers

Vi ser generelt på alle mulige maskiner som opperer over alfabetet $\Gamma = \{0, 1\}$ hvor 0 er en blank celle, og som går i halt på en blank celle. Vi kaller denne mengden med maskiner for T. For denne typen maskiner kan vi definere følgende funksjoner:

- $S(n)$: For alle maskiner i T med n tilstander (utenom halt), finn den maskinen som utfører flest steg (traverserer flest kanter) før den går i halt, når input-tapen er blank. Returner antall trinn denne maskinen utfører. Det vil si, for alle maskiner i T med n tilstander, så finner vi den maskinen som utfører flest steg (traverserer flest kanter) før den går i halt, og returnerer hvor mange trinn dette er.
- $\Sigma(n)$: For alle maskiner i T med n tilstander (utenom halt), så returnerer denne maskimalt antall 1-tall som finnes på tapen når en av maskinene stopper. Det vil si, vi finner den maskinen i T med n tilstander som produserer flest 1-tall, og returnerer hvor mange 1-tall denne maskinen finner.

Oppgave 13.1

S og Σ er totale funksjoner over positive heltall. Det vil si at for et hvert tall $n \geqslant 1$ så finnes det en verdi $S(n)$ og $\Sigma(n)$. Å vise dette er enkelt: Bygg en slik maskin for tallet 1, og vis hvordan den kan utvides for høyere tall.
Gi fullverdige bevis for at S og Σ er totale funksjoner

Oppgave 13.2

S og Σ er monotone funksjoner. At en funksjon f er monoton vil si at $f(n) < f(m) \leftrightarrow n < m$. For å bevise dette for S og Σ må vi bevise følgende:

(a) $S(n) < S(m) \rightarrow n < m$

(b) $n < m \rightarrow S(n) < S(m)$

(c) $\Sigma(n) < \Sigma(m) \rightarrow n < m$

(d) $n < m \rightarrow \Sigma(n) < \Sigma(m)$

Tips:

1. Har vi bevist at S er monoton, kan vi bruke det samme beviset for Σ. Generelt er bevisene like.
2. Når vi skal bevise $S(n) < S(m) \rightarrow n < m$ kan vi anta at $S(n) = k$ og en turingmaskin med n tilstander som bruker k steg (vi trenger ikke vise hvordan denne maskinen ser ut).
3. Når vi skal bevise $n < m \rightarrow S(n) < S(m)$ kan vi skrive om formelen, spesifikt negere begge utsagn foran og etter implikasjon, og erstatte $<$ med $\leqslant$.

Gi fullverdige bevis for at S og Σ er monotone funksjoner.