INF2080 – Logikk og beregninger

Forelesning 15: Logikk

UiO : Institutt for informatikk

Sist oppdatert: 2012-03-22 10:02

15.1 Logikk

Språket

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\wedge$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\wedge$

Disjunksjon: $\vee$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\land$

Disjunksjon: $\lor$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\land$

Disjunksjon: $\lor$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\wedge$

Disjunksjon: $\vee$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Invers kondisjonal: $\leftarrow$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\wedge$

Disjunksjon: $\vee$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Invers kondisjonal: $\leftarrow$

Bikondisjonal: $\leftrightarrow$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\wedge$

Disjunksjon: $\vee$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Invers kondisjonal: $\leftarrow$

Bikondisjonal: $\leftrightarrow$

Universell kvantor: $\forall$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\wedge$

Disjunksjon: $\vee$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Invers kondisjonal: $\leftarrow$

Bikondisjonal: $\leftrightarrow$

Universell kvantor: $\forall$

Eksistensiell kvantor: $\exists$

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\wedge$

Disjunksjon: $\vee$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Invers kondisjonal: $\leftarrow$

Bikondisjonal: $\leftrightarrow$

Universell kvantor: $\forall$

Eksistensiell kvantor: $\exists$

- Frie og bundne variable

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\wedge$

Disjunksjon: $\vee$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Invers kondisjonal: $\leftarrow$

Bikondisjonal: $\leftrightarrow$

Universell kvantor: $\forall$

Eksistensiell kvantor: $\exists$

- Frie og bundne variable
- Signatur

Språket

Verum: $\top$

Falsum: $\bot$

Negasjon: $\neg$

Konjunksjon: $\land$

Disjunksjon: $\lor$

Kondisjonal: $\rightarrow$

Invers kondisjonal: $\leftarrow$

Bikondisjonal: $\leftrightarrow$

Universell kvantor: $\forall$

Eksistensiell kvantor: $\exists$

- Frie og bundne variable
- Signatur
- Formler, litteraler, setninger

Negasjons normal form

$$A \leftrightarrow B \quad \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (A \leftarrow B)$$

Negasjons normal form

$$
\begin{aligned}
A \leftrightarrow B &\Leftrightarrow (A \to B) \wedge (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B &\Leftrightarrow \qquad B \to A
\end{aligned}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{aligned}
A \leftrightarrow B \quad &\Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B \quad &\Leftrightarrow \qquad B \rightarrow A \\
A \rightarrow B \quad &\Leftrightarrow \qquad \neg A \lor B
\end{aligned}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{array}{ccc}
A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \wedge (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B & \Leftrightarrow & B \rightarrow A \\
A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \neg A \vee B \\
\bot & \Leftrightarrow & A \wedge \neg A
\end{array}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{array}{ccc}
A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \wedge (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B & \Leftrightarrow & B \rightarrow A \\
A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \neg A \vee B \\
\bot & \Leftrightarrow & A \wedge \neg A \\
\top & \Leftrightarrow & A \vee \neg A
\end{array}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{aligned}
A \leftrightarrow B &\Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B &\Leftrightarrow B \rightarrow A \\
A \rightarrow B &\Leftrightarrow \neg A \lor B \\
\bot &\Leftrightarrow A \land \neg A \\
\top &\Leftrightarrow A \lor \neg A \\
\neg(A \lor B) &\Leftrightarrow \neg A \land \neg B
\end{aligned}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{array}{ccc}
A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \wedge (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B & \Leftrightarrow & B \rightarrow A \\
A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \neg A \vee B \\
\bot & \Leftrightarrow & A \wedge \neg A \\
\top & \Leftrightarrow & A \vee \neg A \\
\neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & \neg A \wedge \neg B \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & \neg A \vee \neg B
\end{array}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{array}{ccc}
A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \land (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B & \Leftrightarrow & B \rightarrow A \\
A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \neg A \lor B \\
\bot & \Leftrightarrow & A \land \neg A \\
\top & \Leftrightarrow & A \lor \neg A \\
\neg(A \lor B) & \Leftrightarrow & \neg A \land \neg B \\
\neg(A \land B) & \Leftrightarrow & \neg A \lor \neg B \\
\neg \forall x.Fx & \Leftrightarrow & \exists x.\neg Fx
\end{array}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{aligned}
A \leftrightarrow B &\Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B &\Leftrightarrow B \rightarrow A \\
A \rightarrow B &\Leftrightarrow \neg A \lor B \\
\bot &\Leftrightarrow A \land \neg A \\
\top &\Leftrightarrow A \lor \neg A \\
\neg(A \lor B) &\Leftrightarrow \neg A \land \neg B \\
\neg(A \land B) &\Leftrightarrow \neg A \lor \neg B \\
\neg\forall x.Fx &\Leftrightarrow \exists x.\neg Fx \\
\neg\exists x.Fx &\Leftrightarrow \forall x.\neg Fx
\end{aligned}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{array}{ccc}
A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \land (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B & \Leftrightarrow & B \rightarrow A \\
A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \neg A \lor B \\
\bot & \Leftrightarrow & A \land \neg A \\
\top & \Leftrightarrow & A \lor \neg A \\
\neg(A \lor B) & \Leftrightarrow & \neg A \land \neg B \\
\neg(A \land B) & \Leftrightarrow & \neg A \lor \neg B \\
\neg \forall x.Fx & \Leftrightarrow & \exists x.\neg Fx \\
\neg \exists x.Fx & \Leftrightarrow & \forall x.\neg Fx \\
\neg\neg A & \Leftrightarrow & A
\end{array}
$$

Negasjons normal form

$$
\begin{array}{ccc}
A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \wedge (A \leftarrow B) \\
A \leftarrow B & \Leftrightarrow & B \rightarrow A \\
A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \neg A \vee B \\
\bot & \Leftrightarrow & A \wedge \neg A \\
\top & \Leftrightarrow & A \vee \neg A \\
\neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & \neg A \wedge \neg B \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & \neg A \vee \neg B \\
\neg \forall x.Fx & \Leftrightarrow & \exists x.\neg Fx \\
\neg \exists x.Fx & \Leftrightarrow & \forall x.\neg Fx \\
\neg\neg A & \Leftrightarrow & A
\end{array}
$$

Formler kan bygges opp fra litteraler ved $\wedge$ $\vee$ $\forall$ $\exists$

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved $\wedge$ og $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle

Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved $\wedge$ og $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle
- Start med formel

Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved $\wedge$ og $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle
- Start med formel
- Lager tre av delformlene med konjunktive og disjunktive noder

Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved $\wedge$ og $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle
- Start med formel
- Lager tre av delformlene med konjunktive og disjunktive noder
- Konjunksjon — disjunktiv node (NB falsifikasjon)

Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved $\wedge$ og $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle
- Start med formel
- Lager tre av delformlene med konjunktive og disjunktive noder
- Konjunksjon — disjunktiv node (NB falsifikasjon)
- Disjunksjon — konjunktiv node

Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved $\wedge$ og $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle
- Start med formel
- Lager tre av delformlene med konjunktive og disjunktive noder
- Konjunksjon — disjunktiv node (NB falsifikasjon)
- Disjunksjon — konjunktiv node
- Litteraler — bladnode

Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved $\wedge$ og $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle
- Start med formel
- Lager tre av delformlene med konjunktive og disjunktive noder
- Konjunksjon — disjunktiv node (NB falsifikasjon)
- Disjunksjon — konjunktiv node
- Litteraler — bladnode
- Kvitt konjunktive noder ved delmengdekonstruksjon

Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved $\wedge$ og $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle
- Start med formel
- Lager tre av delformlene med konjunktive og disjunktive noder
- Konjunksjon — disjunktiv node (NB falsifikasjon)
- Disjunksjon — konjunktiv node
- Litteraler — bladnode
- Kvitt konjunktive noder ved delmengdekonstruksjon
- Resultat — sekventkalkyle

Sekventkalkyle

Sekventkalkyle

Sekventer: Endelig mengde formler — ofte skrevet Γ eller Δ. Skriver Γ, F for $\Gamma \cup \{F\}$ og F for $\{F\}$

Aksiom: En sekvent som inneholder både en litteral og dens negasjon

Sekventkalkyle

Sekventer: Endelig mengde formler — ofte skrevet Γ eller Δ. Skriver Γ, F for $\Gamma \cup \{F\}$ og F for $\{F\}$

Aksiom: En sekvent som inneholder både en litteral og dens negasjon

Konnektiver	$\dfrac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\dfrac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
Kvantorer	$\dfrac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\dfrac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

Sekventkalkyle

Sekventer: Endelig mengde formler — ofte skrevet Γ eller Δ. Skriver Γ, F for $\Gamma \cup \{F\}$ og F for $\{F\}$

Aksiom: En sekvent som inneholder både en litteral og dens negasjon

Konnektiver	$\dfrac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\dfrac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
Kvantorer	$\dfrac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\dfrac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

$\forall$-kvantor: a er en ny variabel, ikke med i $\Gamma, \forall x.Fx$

Sekventkalkyle

Sekventer: Endelig mengde formler — ofte skrevet Γ eller Δ. Skriver Γ, F for $\Gamma \cup \{F\}$ og F for $\{F\}$

Aksiom: En sekvent som inneholder både en litteral og dens negasjon

Konnektiver	$\dfrac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \land G}$	$\dfrac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \lor G}$
Kvantorer	$\dfrac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\dfrac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

$\forall$-kvantor: a er en ny variabel, ikke med i $\Gamma, \forall x.Fx$

$\exists$-kvantor: t er en term. Språket inneholder minst en term.

Tosidig Sekventkalkyle

Tosidig Sekventkalkyle

Sekvent: $\Gamma \vdash \Delta$, Γ suksedent, Δ antesedent
Aksiom: $\Gamma, A \vdash \Delta, A$ med A atomær

	antesedent	*suksedent*
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg F}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma, F, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F \quad \Gamma \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \wedge G}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \vee G \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \vee G}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, F \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \rightarrow G}$

og regler for kvantorene