

# Logikk

## 15.1 Logikk

### Språket

Verum:  $\top$

Falsum:  $\perp$

Negasjon:  $\neg$

Konjunksjon:  $\wedge$

Disjunksjon:  $\vee$

Kondisjonal:  $\rightarrow$

Invers kondisjonal:  $\leftarrow$

Bikondisjonal:  $\leftrightarrow$

Universell kvantor:  $\forall$

Eksistensiell kvantor:  $\exists$

- Frie og bundne variable
- Signatur
- Formler, litteraler, setninger

### Negasjons normal form

$$\begin{aligned}
 A \leftrightarrow B &\Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (A \leftarrow B) \\
 A \leftarrow B &\Leftrightarrow B \rightarrow A \\
 A \rightarrow B &\Leftrightarrow \neg A \vee B \\
 \perp &\Leftrightarrow A \wedge \neg A \\
 \top &\Leftrightarrow A \vee \neg A \\
 \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \\
 \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\
 \neg\forall x.Fx &\Leftrightarrow \exists x.\neg Fx \\
 \neg\exists x.Fx &\Leftrightarrow \forall x.\neg Fx \\
 \neg\neg A &\Leftrightarrow A
 \end{aligned}$$

Formler kan bygges opp fra litteraler ved  $\wedge \vee \forall \exists$

### Utsagnslogikk

- Formler bygd fra litteraler ved  $\wedge$  og  $\vee$
- Falsifikasjonskalkyle
- Start med formel
- Lager tre av delformlene med konjunktive og disjunktive noder
- Konjunksjon — disjunktiv node (NB falsifikasjon)
- Disjunksjon — konjunktiv node
- Litteraler — bladnode

- Kvitt konjunktive noder ved delmengdekonstruksjon
- Resultat — sekventkalkyle

## Sekventkalkyle

**Sekventer:** Endelig mengde formuler — ofte skrevet  $\Gamma$  eller  $\Delta$ . Skriver  $\Gamma, F$  for  $\Gamma \cup \{F\}$  og  $F$  for  $\{F\}$

**Aksiom:** En sekvent som inneholder både en litteral og dens negasjon

Konnektiver	$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
Kvantorer	$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

$\forall$ -kvantor:  $a$  er en **ny** variabel, ikke med i  $\Gamma, \forall x.Fx$

$\exists$ -kvantor:  $t$  er en term. Språket inneholder minst en term.

## Tosidig Sekventkalkyle

Sekvent:  $\Gamma \vdash \Delta$ ,  $\Gamma$  suksedent,  $\Delta$  antesedent

Aksiom:  $\Gamma, A \vdash \Delta, A$  med  $A$  atomær

	<i>antesedent</i>	<i>suksedent</i>
$\neg$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, F}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg F}$
$\wedge$	$\frac{\Gamma, F, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, F \quad \Gamma \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \wedge G}$
$\vee$	$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \vee G \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, F, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \vee G}$
$\rightarrow$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, F \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \rightarrow G}$

og regler for kvantorene