

# INF2080 – Logikk og beregninger

## Forelesning 16: Analyse og syntese



UiO : **Institutt for informatikk**

Sist oppdatert: 2012-03-22 10:03

## 16.1 Analyse og syntese

# Kalkylen

# Kalkylen

- En kalkyle i logikk — sekventkalkyle
- Tre med binære forgreninger og sekventer ved nodene

# Kalkylen

- En kalkyle i logikk — sekventkalkyle
- Tre med binære forgreninger og sekventer ved nodene
- Sekventen vi skal undersøke — i rotnoden

# Kalkylen

- En kalkyle i logikk — sekventkalkyle
- Tre med binære forgreninger og sekventer ved nodene
- Sekventen vi skal undersøke — i rotnoden
- Aksiomer — i løvnoder

# Kalkylen

- En kalkyle i logikk — sekventkalkyle
- Tre med binære forgreninger og sekventer ved nodene
- Sekventen vi skal undersøke — i rotnoden
- Aksiomer — i løvnoder

**Sekventer:** Endelig mengde formler

# Kalkylen

- En kalkyle i logikk — sekventkalkyle
- Tre med binære forgreninger og sekventer ved nodene
- Sekventen vi skal undersøke — i rotnoden
- Aksiomer — i løvnoder

**Sekventer:** Endelig mengde formler

**Aksiom:** Både en litteral og dens negasjon



# Kalkylen

- En kalkyle i logikk — sekventkalkyle
- Tre med binære forgreninger og sekventer ved nodene
- Sekventen vi skal undersøke — i rotnoden
- Aksiomer — i løvnoder

**Sekventer:** Endelig mengde formler

**Aksiom:** Både en litteral og dens negasjon

<b>Regler:</b>	Konnektiver	$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
	Kvantorer	$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

# En kalkyle — to tolkninger

# En kalkyle — to tolkninger

**Analyse:** Starter med sammensatt uttrykk som brytes ned

**Syntese:** Starter med mange enkle deler som bygges opp

# En kalkyle — to tolkninger

**Analyse:** Starter med sammensatt uttrykk som brytes ned

**Syntese:** Starter med mange enkle deler som bygges opp



# En kalkyle — to tolkninger

**Analyse:** Starter med sammensatt uttrykk som brytes ned

**Syntese:** Starter med mange enkle deler som bygges opp

	Analyse	Syntese
Tolking	Falsifikasjon	Gyldighet

# En kalkyle — to tolkninger

**Analyse:** Starter med sammensatt uttrykk som brytes ned

**Syntese:** Starter med mange enkle deler som bygges opp

	Analyse	Syntese
Tolking	Falsifikasjon	Gyldighet
Retning	Nedenfra	Ovenfra

# En kalkyle — to tolkninger

**Analyse:** Starter med sammensatt uttrykk som brytes ned

**Syntese:** Starter med mange enkle deler som bygges opp

	Analyse	Syntese
Tolking	Falsifikasjon	Gyldighet
Retning	Nedenfra	Ovenfra
Sekvent	Konjunktiv	Disjunktiv

# En kalkyle — to tolkninger

**Analyse:** Starter med sammensatt uttrykk som brytes ned

**Syntese:** Starter med mange enkle deler som bygges opp

	Analyse	Syntese
Tolking	Falsifikasjon	Gyldighet
Retning	Nedenfra	Ovenfra
Sekvent	Konjunktiv	Disjunktiv
Forgrening	Disjunktiv	Konjunktiv



# En kalkyle — to tolkninger

**Analyse:** Starter med sammensatt uttrykk som brytes ned

**Syntese:** Starter med mange enkle deler som bygges opp

	Analyse	Syntese
Tolking	Falsifikasjon	Gyldighet
Retning	Nedenfra	Ovenfra
Sekvent	Konjunktiv	Disjunktiv
Forgrening	Disjunktiv	Konjunktiv

Over til detaljer

# Analyse

# Analyse

- Prøver å falsifisere samtlige formler i en sekvent
- Et aksiom lar seg ikke falsifisere

# Analyse

- Prøver å falsifisere samtlige formler i en sekvent
- Et aksiom lar seg ikke falsifisere

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

# Analyse

- Prøver å falsifisere samtlige formler i en sekvent
- Et aksiom lar seg ikke falsifisere

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — falsifikasjonen sprer seg oppover

# Analyse

- Prøver å falsifisere samtlige formler i en sekvent
- Et aksiom lar seg ikke falsifisere

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — falsifikasjonen sprer seg oppover
- Sekvent-konjunktiv , forgrening-disjunktiv

# Analyse

- Prøver å falsifisere samtlige formler i en sekvent
- Et aksiom lar seg ikke falsifisere

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — falsifikasjonen sprer seg oppover
- Sekvent-konjunktiv , forgrening-disjunktiv
- Kvantorer —  $\alpha$  ny variabel,  $\exists x.Fx$  gjentas

# Analyse

- Prøver å falsifisere samtlige formler i en sekvent
- Et aksiom lar seg ikke falsifisere

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — falsifikasjonen sprer seg oppover
- Sekvent-konjunktiv , forgrening-disjunktiv
- Kvantorer —  $\alpha$  ny variabel,  $\exists x.Fx$  gjentas
- Analysen vellykket — fins grein uten aksiom



# Analyse

- Prøver å falsifisere samtlige formler i en sekvent
- Et aksiom lar seg ikke falsifisere

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — falsifikasjonen sprer seg oppover
- Sekvent-konjunktiv , forgrening-disjunktiv
- Kvantorer —  $a$  ny variabel,  $\exists x.Fx$  gjentas
- Analysen vellykket — fins grein uten aksiom
- Ved analysen tar vi vekk  $\wedge \vee \forall$ , mens  $\exists$  og litteraler blir bevart

# Fair analyse

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

$$\exists x. \forall y. F(x, y)$$

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(a, y)}{\exists x.\forall y.F(x, y)}$$

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

$$\frac{\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b)}{\exists x.\forall y.F(x, y)}, \forall y.F(a, y)}{\exists x.\forall y.F(x, y)}$$

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

$$\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(b, y), F(a, b)}{\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b)}{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(a, y)}} \frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(a, y)}{\exists x. \forall y. F(x, y)}$$



# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

$$\begin{array}{c}
 \frac{\exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b), F(b, c)}{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(b, y), F(a, b)} \\
 \frac{\exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b)}{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(a, y)} \\
 \frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(a, y)}{\exists x. \forall y. F(x, y)}
 \end{array}$$

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

$$\begin{array}{c}
 \exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(c, y), F(a, b), F(b, c) \\
 \hline
 \exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b), F(b, c) \\
 \hline
 \exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(b, y), F(a, b) \\
 \hline
 \exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b) \\
 \hline
 \exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(a, y) \\
 \hline
 \exists x. \forall y. F(x, y)
 \end{array}$$

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

.....

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(c, y), F(a, b), F(b, c)}{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b), F(b, c)}$$

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b), F(b, c)}{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(b, y), F(a, b)}$$

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(b, y), F(a, b)}{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b)}$$

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b)}{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(a, y)}$$

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(a, y)}{\exists x.\forall y.F(x, y)}$$

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

.....

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(c, y), F(a, b), F(b, c)}{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b), F(b, c)}$$

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b), F(b, c)}{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(b, y), F(a, b)}$$

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(b, y), F(a, b)}{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b)}$$

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), F(a, b)}{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(a, y)}$$

$$\frac{\exists x.\forall y.F(x, y), \forall y.F(a, y)}{\exists x.\forall y.F(x, y)}$$

- Vi får dette med  $\exists\forall$  eller med  $\exists$  sammen med funksjonssymboler i språket

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

.....

$$\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(c, y), F(a, b), F(b, c)}{\exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b), F(b, c)}$$

$$\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(b, y), F(a, b)}{\exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b)}$$

$$\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(a, y)}{\exists x. \forall y. F(x, y)}$$

- Vi får dette med  $\exists\forall$  eller med  $\exists$  sammen med funksjonssymboler i språket
- Vi vet hvordan vi skal få til en fair prosess — alt som kan analyseres blir før eller senere analysert

# Fair analyse

- Med kvantorer kan vi risikere uendelige analysetrær

.....

$$\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(c, y), F(a, b), F(b, c)}{\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b), F(b, c)}{\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(b, y), F(a, b)}{\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), F(a, b)}{\frac{\exists x. \forall y. F(x, y), \forall y. F(a, y)}{\exists x. \forall y. F(x, y)}}$$

- Vi får dette med  $\exists\forall$  eller med  $\exists$  sammen med funksjonssymboler i språket
- Vi vet hvordan vi skal få til en fair prosess — alt som kan analyseres blir før eller senere analysert
- Gitt en sekvent — vi kan konstruere et fair analysetre over sekventen

# Syntese

# Syntese

- Prøver å gjøre sekventene gyldige
- Et aksiom er gyldig



# Syntese

- Prøver å gjøre sekventene gyldige
- Et aksiom er gyldig

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

# Syntese

- Prøver å gjøre sekventene gyldige
- Et aksiom er gyldig

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — gyldighet sprer seg nedover

# Syntese

- Prøver å gjøre sekventene gyldige
- Et aksiom er gyldig

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — gyldighet sprer seg nedover
- Sekvent-disjunktiv , forgrening-konjunktiv

# Syntese

- Prøver å gjøre sekventene gyldige
- Et aksiom er gyldig

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — gyldighet sprer seg nedover
- Sekvent-disjunktiv , forgrening-konjunktiv
- Kvantorer —  $a$  ny variabel,  $\exists x.Fx$  gjentas

# Syntese

- Prøver å gjøre sekventene gyldige
- Et aksiom er gyldig

• Reglene —

$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Konnektiver — gyldighet sprer seg nedover
- Sekvent-disjunktiv , forgrening-konjunktiv
- Kvantorer —  $a$  ny variabel,  $\exists x.Fx$  gjentas
- Syntesen vellykket — alle greiner inneholder aksiom