INF2080 – Logikk og beregninger

Forelesning 17: Fullstendighet

UiO : Institutt for informatikk

Sist oppdatert: 2012-03-22 10:03

17.1 Fullstendighet

Selve analysen

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter
  - Fins en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter
  - Fins en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom
  - Alle greiner i $\mathcal{T}(\Gamma)$ inneholder aksiomer

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter
  - Fins en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom
    - Da kan treet være uendelig
  - Alle greiner i $\mathcal{T}(\Gamma)$ inneholder aksiomer

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter
  - Fins en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom
    - Da kan treet være uendelig
    - Fra greinen konstruere vi en falsifikasjon av Γ
  - Alle greiner i $\mathcal{T}(\Gamma)$ inneholder aksiomer

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter
    - Fins en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom
        - Da kan treet være uendelig
        - Fra greinen konstruere vi en falsifikasjon av Γ
    - Alle greiner i $\mathcal{T}(\Gamma)$ inneholder aksiomer
        - Da klarer vi oss med et endelig tre

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter
  - Fins en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom
    - Da kan treet være uendelig
    - Fra greinen konstruere vi en falsifikasjon av Γ
  - Alle greiner i $\mathcal{T}(\Gamma)$ inneholder aksiomer
    - Da klarer vi oss med et endelig tre
    - Det endelige treet gir en utledning av Γ

Fra grein til falsifikasjon

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Univers: Samtlige termer i språket

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Univers: Samtlige termer i språket
Termer: Tolkes som seg selv

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Univers: Samtlige termer i språket

Termer: Tolkes som seg selv

Litteral: Litteraler i G tolkes som usanne — OK siden vi ikke har noe aksiom i G

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Univers: Samtlige termer i språket

Termer: Tolkes som seg selv

Litteral: Litteraler i G tolkes som usanne — OK siden vi ikke har noe aksiom i G

$$\frac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} \qquad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \qquad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Univers: Samtlige termer i språket

Termer: Tolkes som seg selv

Litteral: Litteraler i G tolkes som usanne — OK siden vi ikke har noe aksiom i G

$$\begin{array}{c|c} \dfrac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} & \dfrac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G} \\ \hline \dfrac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} & \dfrac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx} \end{array}$$

- Ved induksjon over oppbyggingen av formlene viser vi at samtlige formler i G blir usanne i tolkningen.

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Univers: Samtlige termer i språket

Termer: Tolkes som seg selv

Litteral: Litteraler i G tolkes som usanne — OK siden vi ikke har noe aksiom i G

$$\frac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \land G} \qquad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \lor G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \qquad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

- Ved induksjon over oppbyggingen av formlene viser vi at samtlige formler i G blir usanne i tolkningen.
- Spesielt får vi falsifikasjon av Γ

Fra falsifikasjon til grein

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon $\mathcal{F}$ av Γ

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon $\mathcal{F}$ av Γ

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \land G} \qquad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \lor G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \qquad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon $\mathcal{F}$ av Γ

$$\frac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} \qquad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \qquad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

- Falsifikasjonen sprer seg oppover

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon $\mathcal{F}$ av Γ

$$\frac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} \qquad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \qquad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

- Falsifikasjonen sprer seg oppover
- Om konklusjonen blir falsifisert, så blir en av premissene også falsifisert

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon $\mathcal{F}$ av Γ

$$\frac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} \qquad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \qquad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

- Falsifikasjonen sprer seg oppover
- Om konklusjonen blir falsifisert, så blir en av premissene også falsifisert
- Trenger at a er ny variabel i analysen av $\forall$

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon $\mathcal{F}$ av Γ

$$\dfrac{\Gamma, F \qquad \Gamma, G}{\Gamma, F \land G} \qquad \dfrac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \lor G}$$

$$\dfrac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \qquad \dfrac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

- Falsifikasjonen sprer seg oppover
- Om konklusjonen blir falsifisert, så blir en av premissene også falsifisert
- Trenger at a er ny variabel i analysen av $\forall$
- Falsifikasjonen gir en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon $\mathcal{F}$ av Γ

$\dfrac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$	$\dfrac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$
$\dfrac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}$	$\dfrac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$

- Falsifikasjonen sprer seg oppover
- Om konklusjonen blir falsifisert, så blir en av premissene også falsifisert
- Trenger at a er ny variabel i analysen av $\forall$
- Falsifikasjonen gir en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$
- Greinen inneholder ikke noe aksiom — kan ikke falsifisere et aksiom

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow \Gamma$ *er gyldig*

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow \Gamma$ *er gyldig*

$\Rightarrow$

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow \Gamma$ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow$ Γ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathfrak{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow$ Γ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow$ Γ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom
- Γ er gyldig

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow \Gamma$ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom
- Γ er gyldig

$\Leftarrow$

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow$ Γ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom
- Γ er gyldig

$\Leftarrow$

- Anta Γ ikke utledbar

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow$ Γ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom
- Γ er gyldig

$\Leftarrow$

- Anta Γ ikke utledbar
- La $\mathcal{T}(\Gamma)$ være et fair analysetre over Γ med grein uten aksiom

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow$ Γ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom
- Γ er gyldig

$\Leftarrow$

- Anta Γ ikke utledbar
- La $\mathcal{T}(\Gamma)$ være et fair analysetre over Γ med grein uten aksiom
- Fra greinen får vi falsifikasjon av Γ

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow \Gamma$ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom
- Γ er gyldig

$\Leftarrow$

- Anta Γ ikke utledbar
- La $\mathcal{T}(\Gamma)$ være et fair analysetre over Γ med grein uten aksiom
- Fra greinen får vi falsifikasjon av Γ
- Γ er ikke gyldig

Likhet

Likhet

- Kan bruke likhet som logisk symbol
- Utvid sekventkalkylen med et ekstra aksiom og en ekstra regel

Likhet

- Kan bruke likhet som logisk symbol
- Utvid sekventkalkylen med et ekstra aksiom og en ekstra regel

Aksiom: $\Gamma, s = s$ for alle termer s

Likhet

- Kan bruke likhet som logisk symbol
- Utvid sekventkalkylen med et ekstra aksiom og en ekstra regel

Aksiom: $\Gamma, s = s$ for alle termer s

Regel: For litteraler L

$$\frac{\Gamma, \mathrm{L}, \mathrm{L}^{\star}, \neg \mathrm{s} = \mathrm{t}}{\Gamma, \mathrm{L}, \neg \mathrm{s} = \mathrm{t}}$$

der $\mathrm{L}^{\star}$ fåes fra L ved å sette inn noen s for t og noen t for s

Likhet

- Kan bruke likhet som logisk symbol
- Utvid sekventkalkylen med et ekstra aksiom og en ekstra regel

Aksiom: $\Gamma, s = s$ for alle termer s

Regel: For litteraler L

$$\frac{\Gamma, L, L^\star, \neg s = t}{\Gamma, L, \neg s = t}$$

der $L^\star$ fåes fra L ved å sette inn noen s for t og noen t for s

Fullstendighet kan fortsatt vises.