INF2080 – Logikk og beregninger

Forelesning 17: Fullstendighet

UiO : Institutt for informatikk

Sist oppdatert: 2012-03-22 10:03

17.1 Fullstendighet

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter
  - Fins en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom
    - Da kan treet være uendelig
    - Fra greinen konstruere vi en falsifikasjon av Γ
  - Alle greiner i $\mathcal{T}(\Gamma)$ inneholder aksiomer
    - Da klarer vi oss med et endelig tre
    - Det endelige treet gir en utledning av Γ

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Univers: Samtlige termer i språket

Termer: Tolkes som seg selv

Litteral: Litteraler i G tolkes som usanne — OK siden vi ikke har noe aksiom i G

$$
\begin{array}{c|c}
\dfrac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} & \dfrac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G} \\
\hline
\dfrac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} & \dfrac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}
\end{array}
$$

- Ved induksjon over oppbyggingen av formlene viser vi at samtlige formler i G blir usanne i tolkningen.
- Spesielt får vi falsifikasjon av Γ

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon $\mathcal{F}$ av Γ

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} \qquad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \qquad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

- Falsifikasjonen sprer seg oppover
- Om konklusjonen blir falsifisert, så blir en av premissene også falsifisert
- Trenger at a er ny variabel i analysen av $\forall$
- Falsifikasjonen gir en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$
- Greinen inneholder ikke noe aksiom — kan ikke falsifisere et aksiom

Teoremet

Γ *er utledbar* $\Leftrightarrow$ Γ *er gyldig*

$\Rightarrow$

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom
- Γ er gyldig

$\Leftarrow$

- Anta Γ ikke utledbar
- La $\mathcal{T}(\Gamma)$ være et fair analysetre over Γ med grein uten aksiom
- Fra greinen får vi falsifikasjon av Γ
- Γ er ikke gyldig

Likhet

- Kan bruke likhet som logisk symbol
- Utvid sekventkalkylen med et ekstra aksiom og en ekstra regel

Aksiom: $\Gamma, s = s$ for alle termer s

Regel: For litteraler L

$$\frac{\Gamma, L, L^\star, \neg s = t}{\Gamma, L, \neg s = t}$$

der $L^\star$ fåes fra L ved å sette inn noen s for t og noen t for s

Fullstendighet kan fortsatt vises.