

Fullstendighet

17.1 Fullstendighet

Selve analysen

- Gitt en sekvent Γ
- Over Γ konstruerer vi et fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$
- To muligheter
 - Fins en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom
 - * Da kan treet være uendelig
 - * Fra greinen konstruere vi en falsifikasjon av Γ
 - Alle greiner i $\mathcal{T}(\Gamma)$ inneholder aksiomer
 - * Da klarer vi oss med et endelig tre
 - * Det endelige treet gir en utledning av Γ

Fra grein til falsifikasjon

- Sekvent Γ
- Fair analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ
- Grein G i $\mathcal{T}(\Gamma)$ uten aksiom

Univers: Samtlige termer i språket

Termer: Tolkes som seg selv

Litteral: Litteraler i G tolkes som usanne — OK siden vi ikke har noe aksiom i G

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} \quad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \quad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

- Ved induksjon over oppbyggingen av formlene viser vi at samtlige formler i G blir usanne i tolkningen.
- Spesielt får vi falsifikasjon av Γ

Fra falsifikasjon til grein

- Sekvent Γ
- Analysetre $\mathcal{T}(\Gamma)$ over Γ — trenger ikke være fair
- Falsifikasjon \mathcal{F} av Γ

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} \quad \frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \quad \frac{\Gamma, Ft, \exists x.Fx}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

- Falsifikasjonen sprer seg oppover
- Om konklusjonen blir falsifisert, så blir en av premissene også falsifisert
- Trenger at a er ny variabel i analysen av \forall
- Falsifikasjonen gir en grein i $\mathcal{T}(\Gamma)$
- Greinen inneholder ikke noe aksiom — kan ikke falsifisere et aksiom

Teoremet

Γ er utledbar $\Leftrightarrow \Gamma$ er gyldig

\Rightarrow

- Anta Γ utledbar
- $\mathcal{T}(\Gamma)$ er analysetre over Γ med aksiomer i alle greiner
- Om Γ kunne falsifiseres, må $\mathcal{T}(\Gamma)$ ha grein uten aksiom
- Γ er gyldig

\Leftarrow

- Anta Γ ikke utledbar
- La $\mathcal{T}(\Gamma)$ være et fair analysetre over Γ med grein uten aksiom
- Fra greinen får vi falsifikasjon av Γ
- Γ er ikke gyldig

Likhet

- Kan bruke likhet som logisk symbol
- Utvid sekventkalkylen med et ekstra aksiom og en ekstra regel

Aksiom: $\Gamma, s = s$ for alle termer s

Regel: For litteraler L

$$\frac{\Gamma, L, L^*, \neg s = t}{\Gamma, L, \neg s = t}$$

der L^* fåes fra L ved å sette inn noen s for t og noen t for s

Fullstendighet kan fortsatt vises.