

Ufullstendighet

18.1 Ufullstendighet

Setting

- Stoppeproblemet kan ikke avgjøres
- Vi kan simulere beregninger ved
 - termer i første ordens logikk
 - logikk over endelige kjeder — spesielt automater
 - logikk over binære trær
- Simuleringene kan ikke avgjøre stoppeproblemet
- Begrensninger for logikk

Simulering — termer i første ordens logikk

- Kan simulere beregning på turingmaskin på en automat med to stacker
- Hver stack kan representeres ved en term i språket
- Kan simulere en beregning på turingmaskin ved en formel bygd opp ved binære relasjoner og unære funksjonssymboler
- Binær relasjon: representerer innholdet i de to stackene i en tilstand
- Unær funksjon: representerer et symbol i alfabetet
- Formel: $START \wedge TRANSISJON \rightarrow FINAL$
- Kan ikke avgjøre om formelen er gyldig eller falsifiserbar
- Kan ikke avgjøre om analysetreet er endelig eller uendelig

Entscheidungsproblem vist uavgjørbart av Turing

Datastruktur — binære trær

Syntaks: Δ_0 — ikke ubegrensede kvantorer

Beregnbart: Σ_1 — \exists utenfor Δ_0

Sannhet / usannhet av Δ_0 -setninger kan avgjøres — bruk endelig tre med OG-noder og ELLER-noder.

Alternativ — bruk følgende aksiom system

1. $\forall x, y. \neg \mathbf{nil} = \mathbf{cons}(x, y)$
2. $\forall x, y, u, v. (\mathbf{cons}(x, y) = \mathbf{cons}(u, v) \rightarrow x = u \vee y = v)$
3. $\forall x. (x = \mathbf{nil} \vee \exists u, v. x = \mathbf{cons}(u, v))$
4. $\forall x. \neg x < \mathbf{nil}$
5. $\forall x, u, v. (x < \mathbf{cons}(u, v) \rightarrow x \preceq u \vee x \preceq v)$

Datastruktur — ufullstendighet

For datastrukturen binære trær gjelder

- Σ_1 -setninger for beregnbarhet
- Π_1 -setninger for ikke-beregnbarhet
- Fins en (beregnbar) aksiomatisering av de sanne Δ_0 -setningene
- Fins ingen (beregnbar) aksiomatisering av de sanne Π_1 -setningene

Tilsvarende gjelder ikke for datastrukturen unære tall — en må ha med addisjon og multiplikasjon for å beskrive syntaks

Dette er en enkel versjon av Gödels ufullstendighets teorem