UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF2080 — Logikk og beregninger
Eksamensdag:	6. juni 2016
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Gjør dine egne forutsetninger dersom du er i tvil om hvordan oppgaveteksten skal tolkes.

DEL I (Automater, språk og beregnbarhetsteori)

Oppgave 1

1a

La L_1 være språket definert av det regulære uttrykket $a^*b^*a^*$. Hvilke av strengene under er i L_1?

a. ab

b. ε

c. bba

d. bab

e. aaa

1b

La L_2 være språket definert av det regulære uttrykket $(a \cup b^*)a^*bab$. Hvilke av strengene under er i L_2?

a. bab

b. bba

c. $bbab$

d. $ababab$

e. $abab$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

For hvert av disse regulære uttrykkene, avgjør hvilken av automatene under som gjenkjenner det samme språket.

a. $ab \cup a$

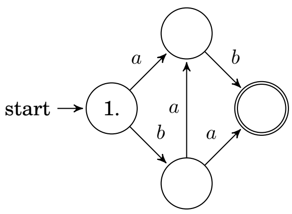
b. $b \cup ba \cup a$

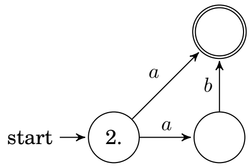
c. $ab \cup ba \cup aaa$

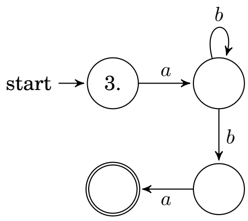
d. $ab \cup ba \cup bab$

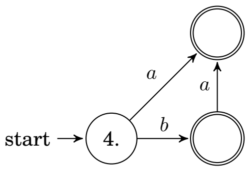
e. ab^*a

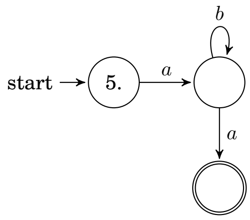
f. ab^*ba

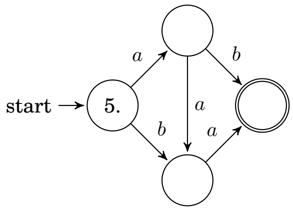












Oppgave 3

Pumpelemma for regulære språk. Hvis A er et regulært språk, så finnes det et tall p (pumpelengden), slik at hvis $s \in A$ og $|s| \geq p$, så kan s deles inn i tre deler $s = xyz$, slik at

1. for alle $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, og
3. $|xy| \leq p$.

3a

Bruk pumpelemmaet til å vise at språket $\mathcal{L} = \{a^n bc^n \mid n \geq 0\}$ ikke er regulært.

3b

Vis at språket $\mathcal{L} = \{a^n bc^n \mid n \geq 0\}$ er kontekstfritt.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

4a

Hva betyr det at en kontekstfri grammatikk (CFG) er tvetydig (ambiguous)?

4b

La G være CFG'en

$$\begin{aligned} S &\to BAB \mid A \\ B &\to \# \mid \varepsilon \\ A &\to aAb \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Vis at denne grammatikken er tvetydig.

4c

La $L_{()}$ være språket av velformede, balanserte parantesuttryk over alfabetet $\Sigma = \{(,)\}$. Da er, f.eks., strengene $()()$ og $()(())$ med i språket, mens $()(()$ og $))($ ikke er i $L_{()}$. Vis at $L_{()}$ er kontekstfritt ved å lage en PDA som gjenkjenner språket.

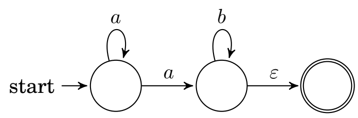
Oppgave 5

5a

Forklar forskjellen mellom *determinisme* og *ikke-determinisme* i dine egne ord. Har deterministiske turingmaskiner og ikke-deterministiske turingmaskiner samme uttrykningskraft?

5b

Gitt NFA'en under, lag en DFA som gjenkjenner det samme språket.



Oppgave 6

Vi definerer en *only-right-turingmaskin* $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ som en vanlig, deterministisk turingmaskin hvor hodet bare kan beveges til høyre.

6a

Gi en formell beskrivelse av komponentene $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ til en only-right turingmaskin.

(Fortsettes på side 4.)

6b

Vis at et språk L er regulært hvis og bare hvis L gjenkjennes av en only-right turingmaskin.

6c

Vi definerer en *only-right-stay-put (ORSP)-turingmaskin* som en determinsitisk turingmaskin hvor hodet enten kan beveges til høyre eller forbli i den samme cellen. Vis at et språk L er regulært hvis og bare hvis L gjenkjennes av en ORSP-turingmaskin.

DEL II (Kompleksitetsteori)

En *brikke* er et ordnet par $\langle x, y \rangle$ der x og y er naturlige tall. La $v(b)$ og $h(b)$ betegne henholdsvis venstre og høyre tall på brikken b. Eksempel: $v(\langle 7, 3 \rangle) = 7$ og $h(\langle 7, 3 \rangle) = 3$.

En *dominosirkel* er en sekvens av brikker $b_1, b_2, \ldots, b_n$ som oppfyller følgende tre krav:

- $n \geq 1$
- $h(b_i) = v(b_{i+1})$ for $i = 1, \ldots, n-1$
- $h(b_n) = v(b_1)$.

Vi sier at en mengde av brikker B *inneholder en sirkel* dersom det finnes en dominosirkel $b_1, \ldots, b_n$ der $b_i \in B$ for $i = 1, \ldots, n$.

Eksempel: Mengden $\{ \langle 3, 9 \rangle , \langle 4, 3 \rangle , \langle 7, 4 \rangle , \langle 9, 4 \rangle , \langle 8, 5 \rangle \}$ inneholder dominosirkelen $\langle 4, 3 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 9, 4 \rangle$.

Språket *DS* er mengden $\{ \langle B \rangle \mid B$ inneholder en sirkel $\}$.

Oppgave 7

Vis at *DS* er i *NL*.

Vi sier at en brikke b er *hvit* når $v(b)$ er et partall. De brikkene som ikke er hvite, kaller vi *sorte* brikker. Eksempel: brikken $\langle 4, 5 \rangle$ er hvit, og brikken $\langle 7, 5 \rangle$ er sort.

La B være en mengde brikker. La $\langle B \rangle$ være med i språket *HVIT-DS* hvis og bare hvis det finnes $b_1, \ldots, b_n \in B$ slik at

- $b_1, \ldots, b_n$ er en dominosirkel, og
- alle hvite brikker i B forekommer i sekvensen $b_1, \ldots, b_n$.

Eksempel: Mengden gitt i eksempelet ovenfor er ikke med i *HVIT-DS*. Den hvite brikken $\langle 8, 5 \rangle$ kan ikke forekomme i en dominosirkel som er lagt med brikker fra mengden.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 8

Vis at

$$\textit{HAMPATH} \quad \leq_P \quad \textit{HVIT-DS}\ .$$

(Hint: La en hvit brikke på formen $\langle a, a+1 \rangle$ svare til en node i en graf, og la en sort brikke svare til en kant i grafen.)

Oppgave 9

En av implikasjonene nedenfor holder. Den andre implikasjonen holder ikke. Angi implikasjonen som holder, og forklar kort hvorfor den holder. Forklar kort hvorfor den andre implikasjonen ikke holder.

(1) *DS* er *PSPACE*-komplett $\Rightarrow$ $P = \textit{PSPACE}$.

(2) *HVIT-DS* er *PSPACE*-komplett $\Rightarrow$ $P = \textit{PSPACE}$.