Universitetet i Oslo
Institutt for Informatikk

A. Maus, R.K. Runde, I. Yu

INF2220: algorithms and data structures

Series 12

Topic Kombinatorisk søk, beregnbarhet og kompleksitet (Exercises with hints for solution)

Issued: 10. 11. 2017

Classroom

Exercise 1 (TV cables) Et firma som leverer TV-kabler til boligfelt har to typer kabler, A og B. Kabelen av type A er litt billigere, men til gjengjeld kan den ikke kuttes opp, men må legges i EN sammenhengende sløyfe som er innom alle husene, og som til slutt går tilbake til det punket der den startet.

Kabelen av type B kan derimot deles opp og legges i stykker mellom husene. Kabelstykkene må legges fra hus til hus slik at alle husene er forbundet med hverandre (direkte eller indirekte).

For å kunne gi gode tilbud vil firmaet bruke så lite kabel som mulig, og også beregne om det lønner seg å bruke kabeltype A eller B. Som en forberedelse til en leveranse vil de alltid dra ut på det aktuelle hus-feltet og måle opp for hvert par av hus hvor mye kabel det vil gå med for å strekke kabel direkte fra det ene huset til det andre. Vi lar n angi antall hus på feltet.

Ola og Kari jobber i firmaet. Ola påstår at han har en algoritme med tidsforbruk $O(n^3)$ som kan finne hvordan man kan legge kabel av type A slik at man bruker kortest mulig kabel. Kari påstår tilsvarende at hun har en algoritme med tidsforbruk $O(n^2)$ som finner hvordan man kan legge kabel B for å bruke minst mulig av denne.

Vurder påstandene til Ola og Kari. Begrunn svaret.

Solution: [of Exercise 1]

Dette problemet med kabel A blir identisk med å løse Traveling Salesman. Det er del av pensum å vite at dette er NP-komplett, og at slike problemer neppe kan løses i polynomisk tid. Dermed er uttalelsen til Ola gal.

Problemet med å legge kabel B slik at minst mulig kabel blir brukt blir imidlertid identisk med å finne et minimalt spenntre mellom husene. For dette problemet finnes to algoritmer, Prim og Kruskal. Om man bruker en proioretskø med kanter i kø bruker disse algoritmene tid $O(E \log n)$. Siden vårt problem har antall kanter som er $O(n^2)$, gir dette tid $O(n^2 \log n)$, og det er mer enn Kari påstår. Når man har mange kanter er det imidlertid en annen enklere utgave av Prim, en som ikke bruker prioritetskø, men holder nodene i randen i en enkel liste. Denne får tid $O(n^2)$, og ut fra det er det helt rimelig påstand Kari kommer med. Noen tilsvarende utgave av Kruskal (med tid $O(n^2)$ finnes ikke.

Exercise 2 (Baseball cards) Exercise 9.56 in MAW.

Solution: [of Exercise 2]
Clearly, the baseball card collector problem (BCCP) is in NP, becaouse it is easy to check if K packets contain all the cards. To show it is NP-complete, we reduce vertex cover to it. Let $G = (V, E)\hat{\text{A}}$ and K be an instance of vertex cover. For each vertex v, place all edges adjacent to v in packet P_v. The K packets will contain all edges (baseball cards) iff G can be covered by K vertices.

Lab

Exercise 3 (Selection) Write a program that prints out all possible selections with exactly m elements from the set of numbers $0, 1, 2, \ldots, n-1$ (assuming $m \leq n$).

Exercise 4 (Derangements) A *derangement* is a permutation p of $\{1, \ldots, n\}$ such that no item is in its proper position, i.e. $p_i \neq i$ for all $1 \leq i \leq n$. Write an efficient backtracking program with pruning that constructs all the derangements of n items.

Exercise 5 (Bridge crossing) There are four people (A, B, C, D) have to cross a bridge. However, the bridge is fragile and can hold at most two of them at the same time. Moreover, to cross the bridge a torch is needed to avoid traps and broken parts. The problem is that these people have only one torch that lasts for only 60 minutes. Each one of them needs a different time to cross the bridge (in either direction):

```
A   5 minutes
B   10 minutes
C   20 minutes
D   25 minutes
```

The problem is now: In which order can the four people cross the bridge in time (that is, in 60 minutes)?

Exercise 6 (Number placement) (From Krogdahl and Maus). Find permutations $x_1, x_2, \ldots, x_9$ of the nine decimal numerals $1, 2, \ldots, 9$ which satisfies the following condition: the decimal number $x_1 x_2$ is divisible by 2, the number $x_1 x_2 x_3$ is divisible by 3, $\ldots$, analogously up to $x_1 x_2 \ldots x_9$. Find all such permutations.

Exercise 7 (Land colouring) We want to colour the countries on a map, such that countries with a common border do not have the same colour. This can always be done with four colurs. Given n countries (numbered from 0 to $n-1$) and a boolean nxn-array indicating for all pairs of countries whether they have a common border or not.

The task is to make a program that creates a possible colouring using only four colours (numbered from 0 to 3).

Exercise 8 (N-Queens) In the well-known *eight queens problem*, the challenge is to place eight queens on an 8 x 8 chessboard so that no queen can take another one, i.e., no *two* queens share the same *row*, *column*, or *diagonal.* The eight queens problem is an example of the more general *N-queens problem* of placing n queens on an N x N chessboard. Write an implementation to solve the *N-queens problem*, where $N \in \mathbb{N}$ and $N > 3$.