

INF 2310 – 20. april 2010 Fouriertransform – del II

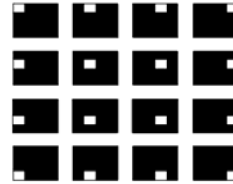
- Kjapp repetisjon
- Bruk av vinduer
- Konvolusjonsteoremet
- Filtre og filtrering i frekvensdomenet

20.04.2010

INF2310

1

Repetisjon Basis-bilder



Sort er 0, hvit er 1.

← Ortogonal basis for alle
4x4 gråtonebilder.

Eksempel:

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

$$= 1 * \begin{matrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix} + 3 * \begin{matrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix} + \dots + 6 * \begin{matrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix}$$

20.04.2010

INF2310

2

Alternativ basis

- Bildene

$$\cos\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{N}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-2\pi(ux + vy)}{N}\right)$$

- med frekvensene

$$u = 0, 1, \dots, N-1$$

$$v = 0, 1, \dots, N-1$$

- Alle digitale bilder av størrelse NxN kan representeres ved vektet summasjon av disse NxN sinus- og cosinus-bildene (basisbilder/basisvektorer)

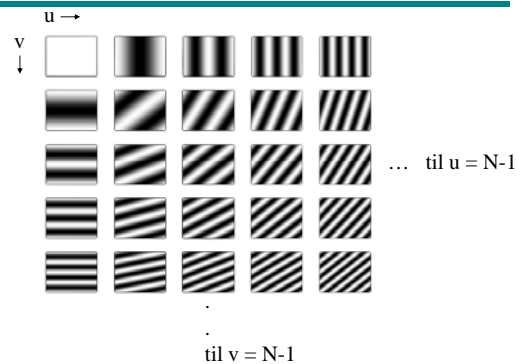
Ved ikke-kvadratiske bilder:
 $\cos(2\pi(ux + vy)/N)$
 $\sin(-2\pi(ux + vy)/N)$

20.04.2010

INF2310

3

Basisbilder - cosinus

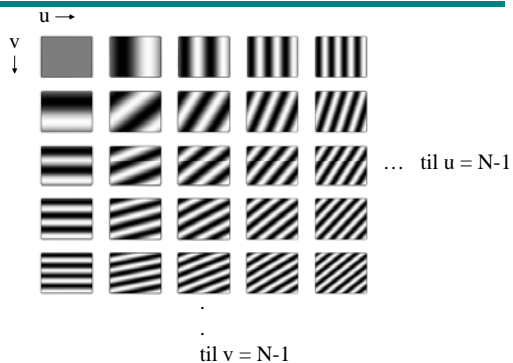


20.04.2010

INF2310

4

Basisbilder - sinus



20.04.2010

INF2310

5

2D diskret Fouriertransform (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

Husk at $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$, slik at vi ender opp sin/cos-basisen vi er vant med:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) [\cos(2\pi(ux/M + vy/N)) - j \sin(2\pi(ux/M + vy/N))]$$

Den inverse transformen:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

20.04.2010

INF2310

6

Litt repetisjon om DFT

- Fouriertransformen $F(u, v)$ er periodisk:
 $F(u, v) = F(u+kN, v+kN)$, k heltall
- Bildet $f(x, y)$ implisitt periodisk: $f(x, y) = f(x+kN, y+kN)$
- Amplitudespekteret er gitt ved $|F(u, v)|$
- Konjugert symmetri: Hvis $f(x, y)$ er reell, er $F(u, v) = F^*(-u, -v)$ og altså $|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$
- Ofte forskyver spekteret med $N/2$ for å få origo ($u=v=0$) midt i bildet
- 2D DFT er separabelt i to 1D DFT
- Shift-teorem: $f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$

20.04.2010

INF2310

7

Bruk av vindusfunksjoner

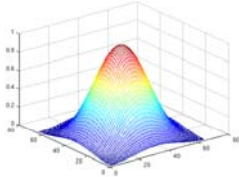
- Må se på bildet som periodisk
- Det oppstår diskontinuiteter i kantene av bildet
- Dette gir kunstige bidrag på aksene i spekteret
- For å begrense slike høyfrekvente bidrag kan man bruke en vindusfunksjon og vekte dataene før DFT beregnes
 - Vindusfunksjonene modifierer pikselverdiene slik at de går mot null i enden av sekvensene
 - Lag $f_w(x, y) = f(x, y)w(x, y)$
 - Ta DFT av $f_w(x, y)$
- "Bildet" kan være en liten del av et større bilde, jfr egenskapsuttrekning

20.04.2010

INF2310

8

Vindusfunksjoner

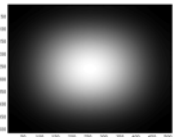


"window function"
"apodization"
"tapering"

← Eksempel:
"Hamming-vindu."

Matlab:

```
h = hamming(N);
w = h*h';
fw = w .* f;
```



20.04.2010

INF2310

9

Effekten av vinduer

- Hvis vi bruker vindusfunksjon til å redusere effekten av bildekantene i spekteret gjør vi $f_w(x,y)=f(x,y)w(x,y)$ før FFT
- Dette gjør at bidragene langs aksene i Fourier-spekteret reduseres, men vi påvirker også andre frekvenser i bildet
- Effekten av en multiplikasjon i billedet er en konvolusjon i frekvensdomenet (konvolusjonsteoremet)
 - Multiplikasjon med en "bred klokkefunksjon" i billedet er ekvivalent med en konvolusjon av en "smal klokkefunksjon" i frekvensdomenet
 - Bruk av vindusfunksjon gir en "blurring" av spekteret

20.04.2010

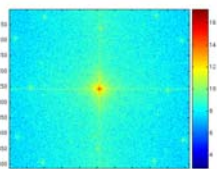
INF2310

10

Eksempel, bruk av vindufunksjon

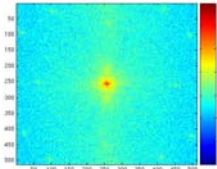


↓ DFT



=

↓ DFT



20.04.2010

INF2310

11

Konvolusjonsteoremet

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot H(u, v)$$

Konvolusjon i billedet \Leftrightarrow Multiplikasjon i frekvensdomenet

Det motsatte gjelder også:

$$f(x, y) \cdot h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

Multiplikasjon i billedet \Leftrightarrow Konvolusjon i frekvensdomenet

20.04.2010

INF2310

12

- Fourier-transformen til et filter h gir oss innblikk i frekvensresponsen til filteret
- Kan designe filter i både frekvensdomenet og billeddomenet
 - Begge kan implementeres som konvolusjon i billeddomenet, eller som multiplikasjon i frekvensdomenet
- F og H må ha samme størrelse: Nullutvide
- Sirkelkonvolusjon

20.04.2010

INF2310

13

Konvolusjonsteoremet 1D

$$\begin{aligned}
 \text{DFT}_k(x \otimes y) &\triangleq \sum_{n=0}^{N-1} (x \otimes y)_n e^{-j2\pi nk/N} \\
 &\triangleq \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(n-m) e^{-j2\pi nk/N} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} y(n-m) e^{-j2\pi nk/N}}_{e^{-j2\pi mk/N} Y(k)} \\
 &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi mk/N} \right) Y(k) \quad (\text{by the Shift Theorem}) \\
 &\triangleq X(k)Y(k)
 \end{aligned}$$

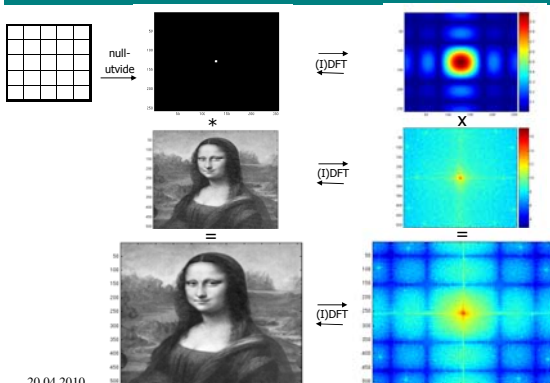
(Kopier fra dspfirsted.com)

20.04.2010

INF2310

14

Eksempel: Middelverdifilteret



20.04.2010

Design i romlige domenet og filtrering i frekvensdomenet

Har en filterkjerne og vil implementere filtreringen i frekvensdomenet:

1. Beregn DFT av bildet
2. Beregn DFT av filterkjernen (med evt nullutvidelse)
3. Multipliser de to transformerte leddene
4. Transformer resultatet tilbake til billeddomenet vha. invers DFT (IDFT)

➤ Husk at filteret og bildet må ha samme størrelse (nullutvide filterkjernen)

20.04.2010

INF2310

16

Når er filtrering raskest i frekvensdomenet?

- $f(x,y)$ har dimensjon $N \times N$, filterkjerne $n \times n$
- Filtrering i bildedomenet krever $N^2 n^2$ multiplikasjoner og tilsvarende addisjoner
- Filtrering i frekvensdomenet:
 - FFT av bildet og filterkernen: $2 * O(N^2 \log_2 N)$
 - Multiplikasjon i frekvensdomenet: N^2 multiplikasjoner
 - Inverstransform av resultatet: $O(N^2 \log_2 N)$
- Filtrering i frekvensdomenet raskere når filteret er stort ($n^2 \gg \log_2 N$)

20.04.2010

INF2310

17

Filterdesign i frekvensdomenet

Lavpassfiltre

- Slipper bare gjennom lave frekvenser (mindre enn en grense D_0 som kalles filterets **cut-off frekvens**)
 - D_0 oppgis ofte som et tall mellom 0 og 1; da menes en cut-off = $D_0 N/2$

- Enkelt (også kalt ideelt) lavpassfilter:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & D(u,v) \leq D_0 \\ 0, & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \sqrt{(u - N/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

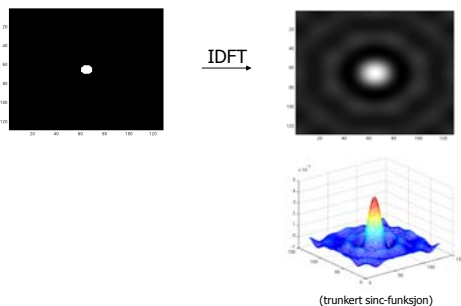
- (Ordet "ideelt" kommer fra om $H(u,v)$ var enten 0 eller 1 for alle mulige frekvenser u og v , ikke kun $0, 1, \dots, N-1$. Dette er et urealiserbart filter, da filterkjerne størrelsen da vil gå mot uendelig)

20.04.2010

INF2310

18

Romlig representasjon av "ideelt" lavpassfilter



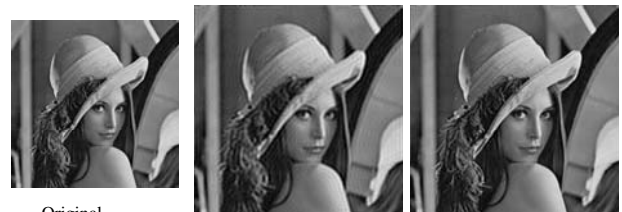
- Vi får en ringing-effekt i bildet
 - Husk tommelfingerregel om utstrekning i fourier- og bilde-domenet

20.04.2010

INF2310

19

Eksempler - ideell lavpass



Original

$D_0=0.2$

$D_0=0.3$

Se på bildene i god nok oppløsning (du skal se stripe/ringing-effekter i de to til høyre).

20.04.2010

INF2310

20

Matlab-eksempel: "Ideelt" lavpassfilter

```

im = double(imread('..'));
H = zeros(M,N);

for i=1:M
  for j=1:N
    if sqrt( (i-M/2)^2 + (j-N/2)^2 ) < N/2*r0
      H(i,j) = 1;
    end
  end
end

IM = fftshift( fft2(im) );
im_filt = ifft2( ifftshift( IM.*H ) );

imagesc( real( im_filt ) );

```

20.04.2010

INF2310

21

Butterworth lavpassfilter

- Vindusfunksjoner brukes til å redusere ringing-effekten
- Butterworth lavpassfilter av orden n :

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v) / D_0]^{2n}}$$

- Her vil D_0 beskrive punktet der $H(u,v)$ har falt til halvparten av sin maksimumsverdi
 - Lav filterorden (n liten): $H(u,v)$ faller langsomt: Lite ringing
 - Høy filterorden (n stor): $H(u,v)$ faller raskt: Mer ringing
- Andre filtre kan også brukes, f.eks. Gaussisk, Bartlett, Blackman, Hamming, Hanning

20.04.2010

INF2310

22

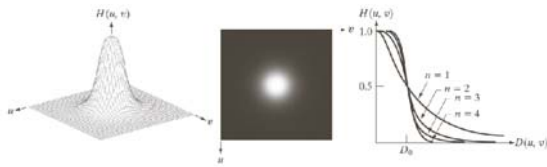


FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth low-pass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

20.04.2010

INF2310

23

Eksempler Butterworth-lavpass



n=11

n=41

n=61

20.04.2010

INF2310

24

Høypassfiltrering

- Ideelt høypassfilter:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) < D_0, \\ 1, & D(u, v) \geq D_0. \end{cases}$$

- Butterworth høypassfilter:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

20.04.2010

INF2310

25

Båndpass og båndstopfiltere

- Båndpassfilter: Slipper gjennom kun energien i et bestemt frekvensbånd $\langle D_{\text{low}}, D_{\text{high}} \rangle$ (eller $\langle D_0 - \Omega, D_0 + \Omega \rangle$)
- Båndstopfilter: Fjerner energi i et bestemt frekvensbånd $\langle D_{\text{low}}, D_{\text{high}} \rangle$

- Butterworth båndstopfilter:

$$H_s(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{\Omega D(u, v)}{D(u, v)^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$$

- Butterworth båndpassfilter:

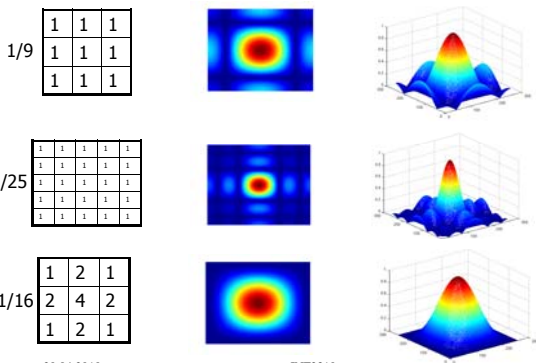
$$H_p(u, v) = 1 - H_s(u, v)$$

20.04.2010

INF2310

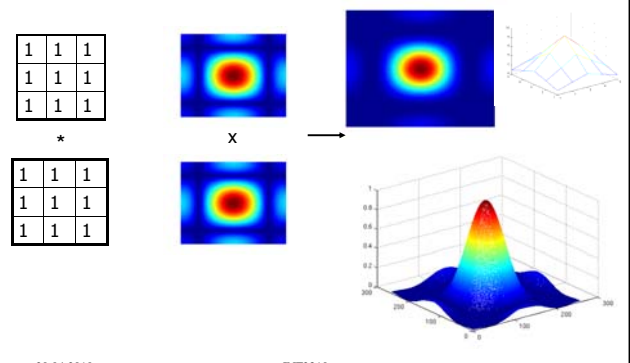
26

Frekvensrespons til noen vanlige filtre



20.04.2010

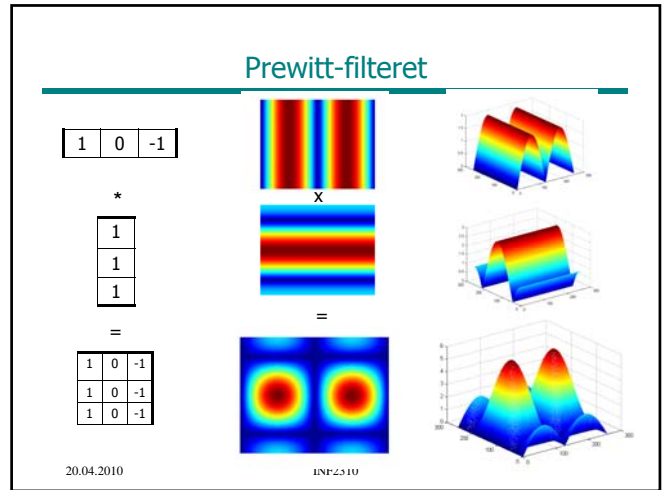
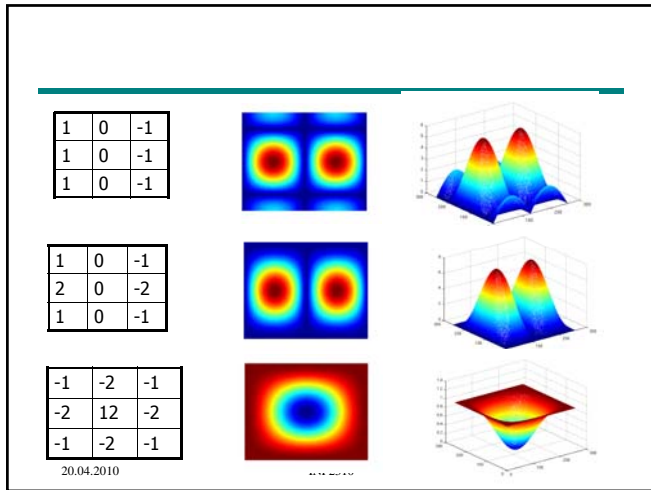
INF2310



20.04.2010

INF2310

28



Korrelasjonsteoremet

$$f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)^* \cdot H(u, v)$$

- Korrelasjon i bildedomenet \Leftrightarrow Multiplikasjon (med $F^*(u, v)$) i frekvensdomenet
- Med $F(u, v)^*$ menes den kompleks-konjugerte til $F(u, v)$
- Det motsatte gjelder også:

$$f(x, y)^* \cdot h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v)$$

- Brukes f.eks. til templatmatching

20.04.2010 INF2310 31

Oppsummering

- Vindusfunksjoner
- Konvolusjonsteoremet:
Konvolusjon i bildedomenet er ekvivalent med multiplikasjon i frekvensdomenet, og omvendt
- Filtrering kan gjøres i frekvensdomenet
- Design av filtre i frekvensdomenet
 - Lavpass, høypass, båndpass, båndstopp
- Analyse av frekvensresponsen til konvolusjonsfiltre

20.04.2010 INF2310 32