20170320.

Foreløbig versjon!

INF 2310 – 22. mars 2017

Fourier I -- En litt annen vinkling på stoffet i kapittel 4

I dag:

- Sinus-funksjoner i 1D og 2D
- 2D diskret Fouriertransform (DFT)

Mandag: *Ekstraforelesning* av Kristine holdes mandag 27. mars. Litt mer om det matematiske fundamentet.

Neste uke:

- Konvolusjonsteoremet
- Filtre og filtrering i frekvensdomenet
- Vindusfunksjoner

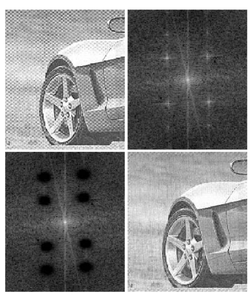
Introduksjon I/II

- Et gråtonebilde
  - Typisk representasjon: Matrise av gråtoneintensiteter
  - Fourier: En vektet sum av sinuser og cosinuser med ulik frekvens og orientering

- Et slik skifte av representasjon kalles ofte et «basis-skifte»

Introduksjon II/II

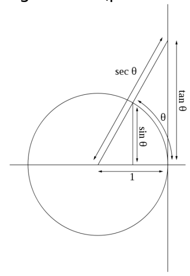
- Hvorfor skifte basis?
  - Analyse av bilder
    - Fjerne/dempe periodisk støy
    - Kompresjon
  - Analyse og design av lineære filtre (konvolusjonsteoremet)
  - Egenskapsuttrekning (feks. Tekstur)
  - Rask implementasjon av (større) konvolusjonsfiltre

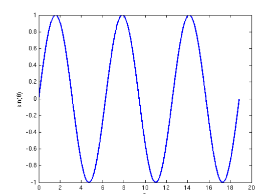


Fjerning av periodisk støy, fig. 4.64 i DIP.
Ut-bildet er resultatet av en konvolusjon, men det er vanskelig å designe filteret i bildedomenet.

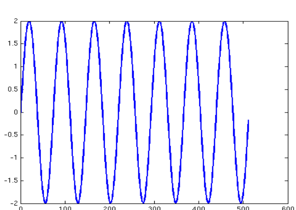
Funksjonen sin(θ)

sin(θ) svinger mellom 1 og -1 når θ varierer mellom 0 og 2π, og den svinger på samme måte når θ varierer mellom 2π og 4π osv. (periodisk)





«Diskret» sinus/cosinus i 1D



$$y(i) = A \sin(2\pi ui/N + \varphi)$$

N : antall sampler
u : antall hele perioder
φ : horisontal forskyvning (fase)
A : Amplitude

I dette eksemplet er
A=2, u=7, N=512 og ϕ=0

Hva er forskjellen på sin(θ) og cos(θ)?

- **sin(2πui/N)** starter på 0 og repeteres u ganger per N samples

- **cos(2πui/N)** starter på 1 og repeteres u ganger per N samples

Bare startpunktet, dvs. faseforskyvningen, ϕ, er forskjellig

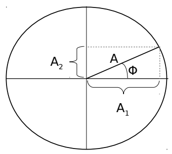
Hva får vi om vi legger sammen sin og cos?

- $A_1\sin(\theta) + A_2\cos(\theta) = A\sin(\theta + \Phi)$,

  der $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ og $\Phi = \mathrm{atan2}(A_2, A_1)$

- Vi ender altså opp med en sin-funksjon med samme frekvens, men endret amplitude og fase

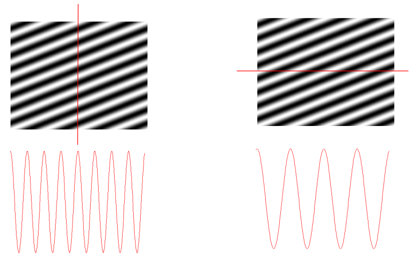
- Vi kan også gå andre veien og si at enhver sinus-funksjon med gitt frekvens kan dannes ved å legge sammen en vektet sin- og en vektet cos-funksjon med denne samme frekvensen



Alternativ "koding"/representasjon av informasjonen (A, Φ, θ) er altså (A_1, A_2, θ)

Introduksjon til sinus-funksjoner i 2D

- Vertikal og horisontal komponent



Sinusfunksjoner i bilder (2D)

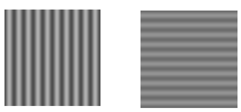
$$f(x,y) = A\sin(\frac{2\pi(ux+vy)}{N} + \phi)$$

A – amplitude

u – vertikal frekvens

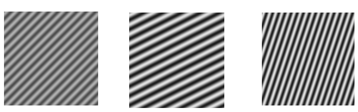
v – horisontal frekvens

ϕ - faseforskyvning



A=50, u=0, v=10 A=20, u=10, v=0

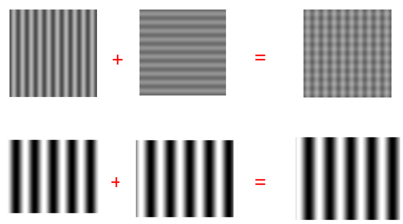
I eksemplene vises 0 som grått, -127 som sort, og 127 som hvitt



A=50, u=10, v=10 A=100, u=10, v=5 A=100, u=5, v=15

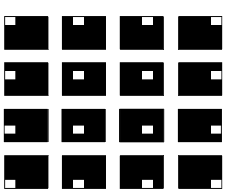
Merk: u og v er antall repetisjoner i bildet vertikalt og horisontalt

Eksempler: Sum av 2D sinfunksjoner



Sum av to bilder med lik frekvens (og lik retning) gir nytt bilde med samme frekvens (og retning), jfr s. 7.

«Basis-bilder»



Sort er 0, hvit er 1.

Ortogonal basis for alle 4x4 gråtonebilder.

Eksempel:

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

= 1*  + 3*  +….+ 6* 

Alternativ basis

- Bildene

$$\cos(\frac{2\pi(ux+vy)}{N}) \qquad \sin(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N})$$

- med frekvensene

  u = 0,1,…,N-1
  v = 0,1,…,N-1

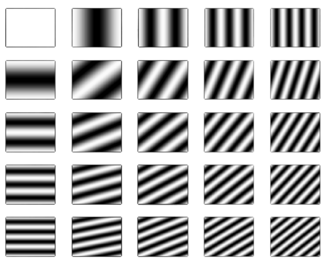
- Alle digitale gråtonebilder av størrelse NxN kan representeres ved en vektet summasjon av disse NxN sinus- og cosinus-bildene (basisbilder/basisvektorer)

Ved ikke-kvadratiske bilder:
$\cos(2\pi(ux/M+vy/N))$
$\sin(-2\pi(ux/M+vy/N))$

Basisbilder - cosinus

v →

u ↓



… til v = N-1

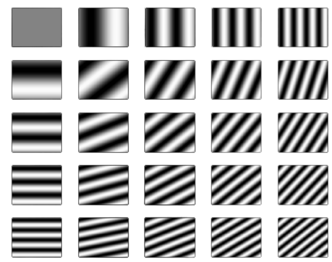
.
.
til u = N-1

I illustrasjonen indikerer sort -1 og hvitt 1

Basisbilder - sinus

v →

u ↓



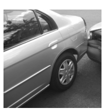
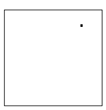
… til v = N-1

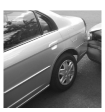
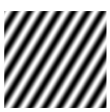
.
.
til u = N-1

I illustrasjonen indikerer sort -1 og hvitt 1

Hvordan finne bidraget fra et gitt basisbilde?

"Vanlig" basis med bare 0-ere og ett piksel lik 1

sum ( x ) ≈ 255 (bakre del av bilen)

sum ( x )

Bidraget finnes altså ved indreproduktet mellom bildet og basisbildet

Symmetri i basisbildene

cosinus

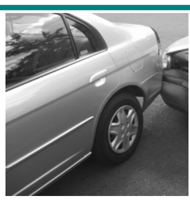
u= 0 1 2 3 4 …. N-5 N-4 N-3 N-2 N-1

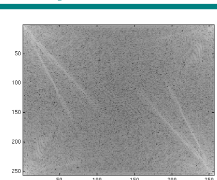
sinus

u= 0 1 2 3 4 …. N-5 N-4 N-3 N-2 N-1

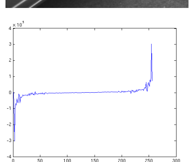
(antisymmetri i sinus-bildene)

Eksempel (symmetri)

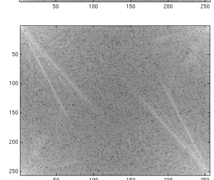




Logaritmen til absoluttverdien til cosinus-bidragene



Første linjen i sinus-bidragene

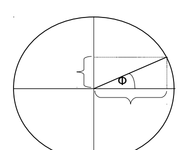


Logaritmen til absoluttverdien til sinus-bidragene

Finne fase og amplitude

- La R inneholde cosinus-bidragene og I inneholde sinus-bidragene.
- Fasen til sinfunksjonen med frekvens u,v:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right)$$

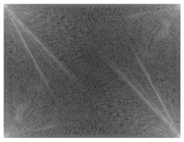


- Amplituden til sinfunksjonen med frekvens u,v:

$$A = \sqrt{R(u,v)^2 + I(u,v)^2}$$

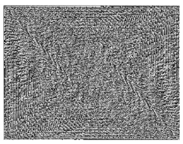
Husk fra s. 7: (A, Φ, θ) <=> (A_1, A_2,θ)

Eksempel: Amplitude og fase



(Log av) amplituden eller spekteret

Forteller noe om hvilke frekvenser bildet inneholder



ϕ(u,v) - fasen

Visuelt ser fasebildet ut som støy, men fasen inneholder viktig informasjon

Resultat som komplekst tall

- Letter håndtering ved å representere resultatet som et *komplekst tall*: cosinus-bidragene i realdelen og sinus-bidragene i imaginærdelen
- La F beskrive bildet i den nye basisen
- F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v) , $j = \sqrt{-1}$
- Amplitude og fase kommer da ut som modulus og argument (lengde og vinkel i komplekse planet)

2D diskret Fouriertransform (DFT)

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x,y)\, e^{-2j\pi(ux/N+vy/M)}$$

Husk at $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$, slik at vi ender opp sin/cos-basisen vi er vant med:

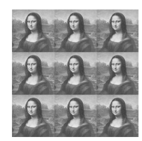
$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x,y)\Big[\cos\left(2\pi(ux/N+vy/M)\right) + j\sin\left(-2\pi(ux/N+vy/M)\right)\Big]$$

Den inverse transformen:

$$f(x,y) = \frac{1}{NM}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} F(u,v)\, e^{2j\pi(ux/N+vy/M)}$$

Egenskaper ved 2D DFT

- F(u,v) er periodisk:
  F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+N) = F(u+N,v+N)



- Skal inverstranformen holde, må vi anta at bildet er periodisk:
  f(x,y) = f(x+N,y) = f(x,y+N) = f(x+N,y+N)
- Konjugert symmetri:
  Hvis f(x,y) er reell,
  er F(u,v) = conj(F(-u,-v))
  Altså er |F(u,v)|=|F(-u,-v)|

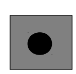
Om ikke annet er oppgitt, antar vi at N=M for enklere notasjon

Egenskaper ved 2D DFT, forts

- F(0,0) er proporsjonal med middelverdien i bildet
- Shift-teoremet: $f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\, e^{-j2\pi(ux0+vy0)/N}$
- 2D DFT er separabelt i to 1D DFT
  - Absolutt nødvendig (sammen med FFT) for å beregningsmessig kunne transformere bilder av en viss størrelse

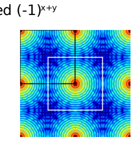
Framvisning av amplitudespekteret

- Siden F(u,v) er periodisk med periode N, er det vanlig å forskyve spekteret slik at origo (u=v=0) ligger midt i bildet
  - Bytte kvadranter
  - eller pre-multiplisere f(x,y) med $(-1)^{x+y}$



f(x,y)

f(x,y): bildedomenet



|F(u,v)|

F(u,v): frekvensdomenet

|F(u,v)| kalles spekteret til f(x,y)

(amplitudespekteret)

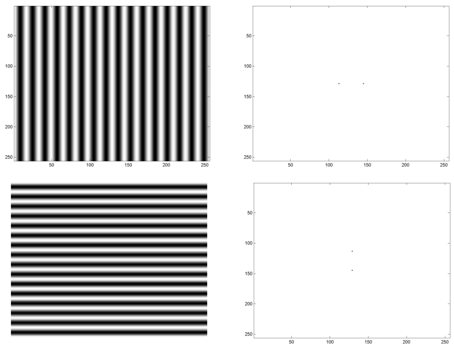
(”Powerspekteret”: $|F(u,v)|^2$)

Forts. framvisning av spektere

Skalering av verdier:

- Ofte stor dynamikk i |F(u,v)| (kan ha høye verdier)
- Vanlig å benytte logaritmisk skala
  - g(u,v)=C* log(|F(u,v)|+1), der C velges slik at man får gråtoner i mellom for eksempel 0 og 255 (8 bit) XXX

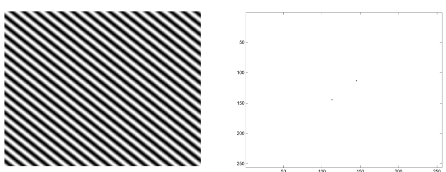
Eksempler



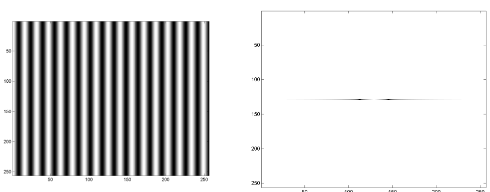
<- spekter

Her: hvitt=0

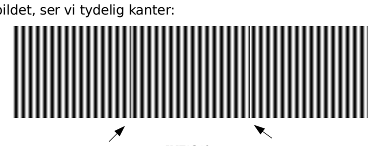
Eksempel – "skrå" frekvens



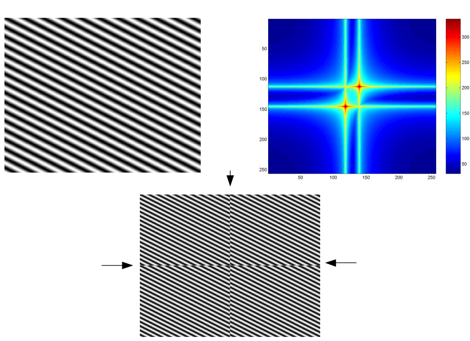
Eksempel - diskontinuitet



Ved å repetere bildet, ser vi tydelig kanter:



Eksempel – diskontinuitet II



Eksempel - vanlige objektformer

Examples of the Fourier transform for other simple shapes are shown be

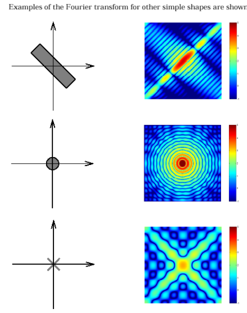
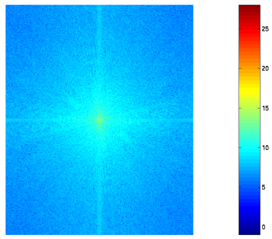
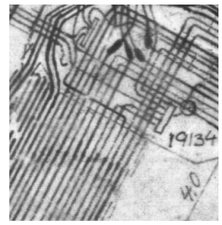


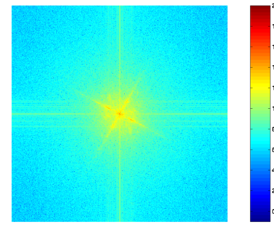
Figure 7-4: Fourier Transforms of Some Simple Shapes

Eksempel – ”vanlig” bilde

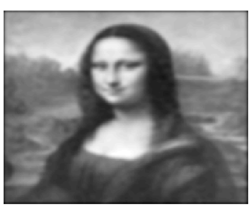


Eksempel - retningsdominant

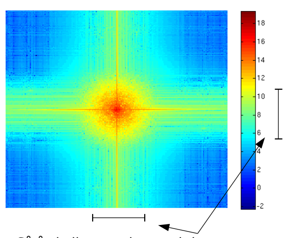




Eksempel - smal båndbredde



Lav oppløsning, lite detaljer



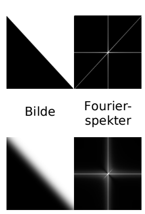
Så å si all «energien» er i dette smale området/båndet (både vertikalt og horisontalt)

Noen observasjoner

- Vanligvis størst bidrag/mest energi i spekteret for lave verdier av u,v
- Bidrag langs u- og v-aksen fordi bildet er implisitt periodisk og vi har diskontinuiteter langs kantene
- Linjestrukturer i gitt retning i bildedomenet har linjestruktur normalt på retningen i Fourier-domenet

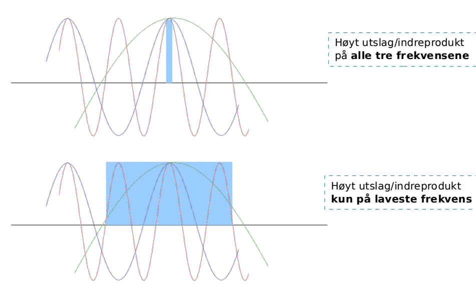
.. og noen observasjoner til

- Skarp kant:
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourier-koeffisienter er $\neq 0$
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- ”Blurret” kant:
  - Tilsvarer færre sinusoider
  - Smalere bånd i Fourier-domenet



- Tommelfingerregler:
  - Smal struktur i bildedomenet : Bred struktur i Fourier-domenet
  - Bred struktur i bildedomenet: Smal struktur i Fourier-domenet
  - Linjestruktur i retning θ i bildedomenet: Linjestruktur i retning $\theta \pm 90°$ (normalt på) i Fourier-domenet

Intuisjonsbygging rundt smal struktur i bildedomenet -> bred struktur i Fourier-domenet, og omvendt



Implementasjon av DFT

- Beregning av F(u,v) for én u,v: $O(N^2)$
- Beregning for hele bildet: $N \times N$ F(u,v): $O(N^4)$
- Finnes en algoritme for rask beregning, 2D FFT (Fast Fouriertransform)
  - Benytter at Fourier-transformen er separabel i to 1D transformer
  - Bruker bilder (eller delbilder) med størrelse 2^k (k er heltall)
  - Har orden $O(N^2 \log_2 N)$

Fourier-transform i Matlab/Octave

- F = fft2(f); % Gjør en 2D DFT-transform
- f = ifft2(F); % .. og den inverse transformen
- F_r = real(F); % Realdelen, altså cosinus-basis-bidragene
- F_i = imag(F); % Imaginærdelen, altså sinus-basis-bidragene
- F_s = abs(F); % Fourier-spekteret
- F_p = angle(F); % Fasen
- F_r(u+1,v+1); % Gir ”cosinus-bidragene” for frekvens u,v
- F_r(1,1); % Gir ”DC-komponenten”
- fftshift og ifftshift: Flytter kvadranter slik at nullfrekvensen er i midten av bildet, samt omvendt
- imagesc(fftshift(log(F_s)) + 1));

«+ 1»: Kjapp og gæli kompresjon av fargedynamikken, XXX mulig bytt til [0 max(log(F_s(:))]

Oppsummering

- Sinus-funksjoner
  - frekvens/periode, amplitude og fase
  - dekomponere Asin(θ+Φ) i sin- og cos-komponent
  - 1D og 2D
- Diskret Fourier-transform
  - bildet beskrevet med cos/sin-basisbilder
  - kompleks representasjon
    - cos- og sin-ledd som reell- og imaginær-komponent
  - implisitt periodisitet
    - utslag i diskontinuitet -> ”ekstra” frekvenser
  - fremvisning av spekteret |F(u,v)|
  - tommelfingerregler