

INF 2310 – 3. april 2019

Fourier I -- En litt annen vinkling på stoffet i kapittel 4

I dag:

- Sinus-funksjoner i 1D og 2D
- 2D diskret Fouriertransform (DFT)

Neste uke:

- Konvolusjonsteoremet
- Filtre og filtrering i frekvensdomenet
- Vindusfunksjoner

2019.04.03

INF2310

1 / 39

Introduksjon I/II

- Et gråtonebilde
 - Typisk representasjon: Matrise av gråtoneintensiteter
 - Fourier: En vektet sum av sinuser og cosinuser med ulik frekvens og orientering



- Et slikt skifte av representasjon kalles ofte et «basis-skifte»

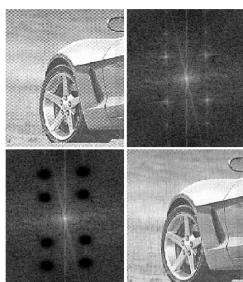
2019.04.03

INF2310

2 / 39

Introduksjon II/II

- Hvorfor skifte basis?
 - Analyse (og syntese) av bilder
 - Skarphet, om er orienteringsdominert, etc.
 - Fjerne/dempe periodisk støy
 - Kompresjon
 - Analyse og design av lineære filtre (konvolusjonsteoremet)
 - Egenskapsuttrekning (feks. Tekstur)
 - Rask implementasjon av (større) konvolusjonsfiltre
 - Fordi vi kan!



Fjerning av periodisk støy, fig. 4.64 i DIP. Ut-bildet er resultatet av en konvolusjon, men det er vanskelig å designe filteret i billedomenet.

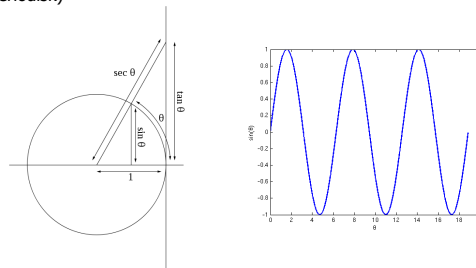
2019.04.03

INF2310

3 / 39

Funksjonen $\sin(\theta)$

$\sin(\theta)$ svinger mellom 1 og -1 når θ varierer mellom 0 og 2π , og den svinger på samme måte når θ varierer mellom 2π og 4π osv. (periodisk)

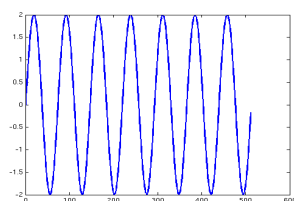


2019.04.03

INF2310

4 / 39

«Diskret» sinus/cosinus i 1D



$$y(i) = A \sin(2\pi u i / N + \phi)$$

N : antall sampler
 u : antall hele perioder
 ϕ : horisontal forskyvning (fase)
 A : Amplitude

I dette eksemplet er
 $A=2$, $u=7$, $N=512$ og $\phi=0$

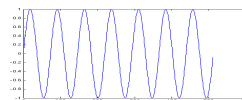
2019.04.03

INF2310

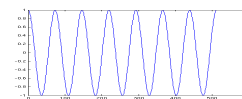
5 / 39

Hva er forskjellen på $\sin(\theta)$ og $\cos(\theta)$?

- $\sin(2\pi u i / N)$ starter på 0 og repeteres u ganger per N samples



- $\cos(2\pi u i / N)$ starter på 1 og repeteres u ganger per N samples



Bare startpunktet, dvs. faseforskyvningen, ϕ , er forskjellig

2019.04.03

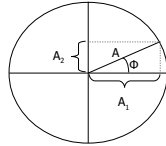
INF2310

6 / 39

Hva får vi om vi legger sammen sin og cos?

• $A_1 \sin(\theta) + A_2 \cos(\theta) = A \sin(\theta + \Phi)$,
 der $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ og $\Phi = \text{atan2}(A_2, A_1)$

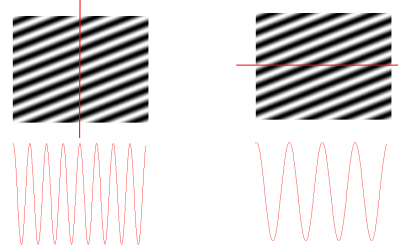
- Vi ender altså opp med en sin-funksjon med samme frekvens, men endret amplitude og fase
- Vi kan også gå andre veien og si at enhver sinus-funksjon med gitt frekvens kan dannes ved å legge sammen en vektet sin- og en vektet cos-funksjon med denne samme frekvensen



Alternativ "koding"/representasjon av informasjonen (A, Phi, theta) er altså (A1, A2, theta)

Introduksjon til sinus-funksjoner i 2D

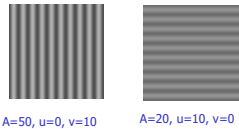
- Vertikal og horisontal komponent



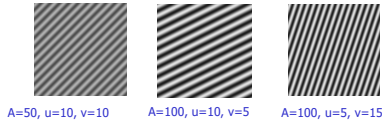
«Diskret» sinus/cosinus i 2D

$$f(x, y) = A \sin\left(\frac{2\pi(u x + v y)}{N} + \phi\right)$$

- A – amplitude
- u – vertikal frekvens
- v – horisontal frekvens
- phi – faseforskyvning

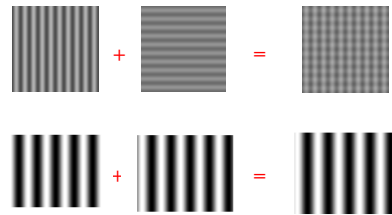


I eksemplene vises 0 som grått, -127 som sort, og 127 som hvitt



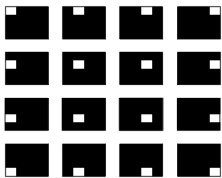
Merk: u og v er antall repetisjoner i bildet vertikalt og horisontalt

Eksempler: Sum av 2D sinfunksjoner



Sum av to bilder med lik frekvens (og lik retning) gir nytt bilde med samme frekvens (og retning), jfr s. 7.

«Basis-bilder»



Sort er 0, hvit er 1.
 Ortogonal basis for alle 4x4 gråtonebilder.

Eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} = 1 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + 6 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alternativ basis (Fourier)

- Bildene

$$\cos\left(\frac{2\pi(u x + v y)}{N}\right) \quad \sin\left(\frac{-2\pi(u x + v y)}{N}\right)$$

- med frekvensene

$$u = 0, 1, \dots, N-1$$

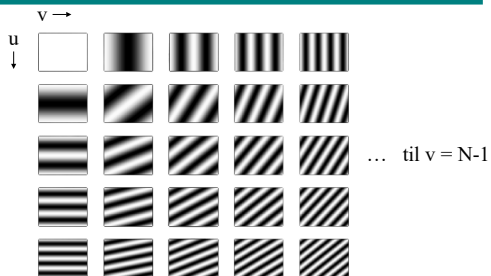
$$v = 0, 1, \dots, N-1$$

- Alle digitale gråtonebilder av størrelse NxN kan representeres ved en vektet summasjon av disse NxN sinus- og cosinus-bildene (basisbilder/basisvektorer)

Denne basisen er også ortogonal, sett bort i fra duplikat-komponentene grunnet symmetriene og antisymmetriene til cos og sin (noe vi kommer til om litt)

Ved ikke-kvadratiske bilder: $\cos(2\pi(ux+vy/N))$ $\sin(-2\pi(ux+vy/N))$

Basisbilder - cosinus



til $u = N-1$

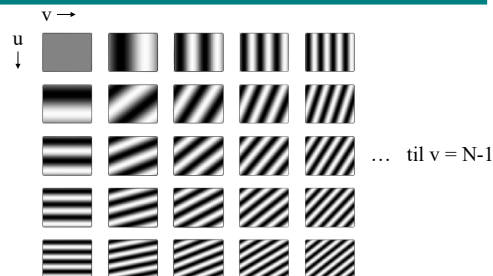
I illustrasjonen indikerer sort -1 og hvitt 1

2019.04.03

INF2310

13 / 39

Basisbilder - sinus



til $u = N-1$

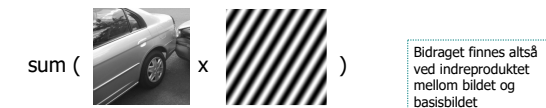
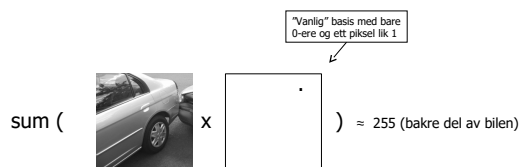
I illustrasjonen indikerer sort -1 og hvitt 1

2019.04.03

INF2310

14 / 39

Hvordan finne bidraget fra et gitt basisbilde?

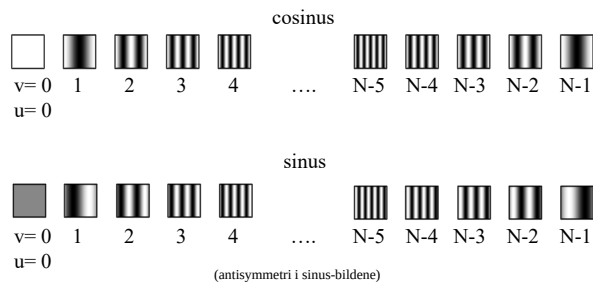


2019.04.03

INF2310

15 / 39

Symmetri i basisbildene

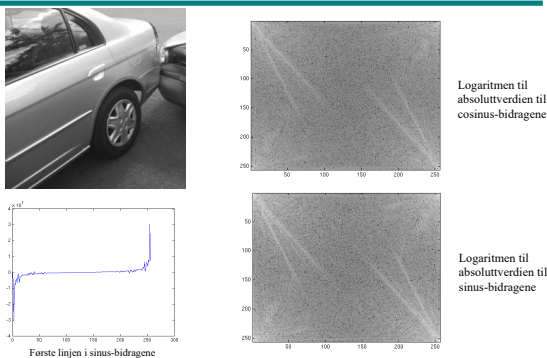


2019.04.03

INF2310

16 / 39

Eksempel (symmetri)



2019.04.03

INF2310

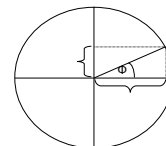
17 / 39

Finne fase og amplitude

- La R inneholde cosinus-bidragene og I inneholde sinus-bidragene.

- Fasen til sinfunksjonen med frekvens u, v :

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right)$$



- Amplituden til sinfunksjonen med frekvens u, v :

$$A = \sqrt{R(u, v)^2 + I(u, v)^2}$$


Husk fra s. 7: $(A, \Phi, \theta) \Leftrightarrow (A_u, A_v, \theta)$

2019.04.03

INF2310

18 / 39

Eksempel: Amplitude og fase



(Log av) amplituden eller spekteret
Forteller noe om hvilke frekvenser bildet inneholder

$\phi(u,v)$ - fasen
Visuelt ser fasebildet ut som støy, men fasen inneholder viktig informasjon

2019.04.03

INF2310

19 / 39

Resultat som komplekst tall

- Letter håndtering (og utvider bruksområdet) ved å representere resultatet med *komplekse tall*: cosinus-bidragene i realdelen og sinus-bidragene i imaginærdelen
- La F beskrive bildet i den nye basisen
- $F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v)$, $j = \sqrt{-1}$
- Amplitude og fase kommer da ut som modulus og argument (lengde og vinkel i komplekse planet)

INF2310

20 / 39

2D diskret Fouriertransform (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-2j\pi(ux/N + vy/M)}$$

Husk at $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$, slik at vi ender opp med sin/cos-basisen vi er vant med:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) [\cos(2\pi(ux/N + vy/M)) + j \sin(-2\pi(ux/N + vy/M))]$$

Den inverse transformen:

$$f(x, y) = \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) e^{2j\pi(ux/N + vy/M)}$$

2019.04.03

INF2310

21 / 39

Egenskaper ved 2D DFT

- $F(u,v)$ er periodisk:
 $F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+N) = F(u+N,v+N)$
- Skal inverstranformen holde, må vi anta at bildet er periodisk:
 $f(x,y) = f(x+N,y) = f(x,y+N) = f(x+N,y+N)$
- Konjugert symmetri:
 Hvis $f(x,y)$ er reell, er $F(u,v) = \text{conj}(F(-u,-v))$
 Altså er $|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$



Om ikke annet er oppgitt, antar vi at $N=M$ for enklere notasjon

2019.04.03

INF2310

22 / 39

Egenskaper ved 2D DFT, forts

- $F(0,0)$ er proporsjonal med middelverdien i bildet
- Shift-teoremet: $f(x-x_0, y-y_0) \leftrightarrow F(u,v) e^{-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N}$
- 2D DFT er separabelt i to 1D DFT
 - Absolutt nødvendig (sammen med FFT-algoritmen) for å beregningsmessig kunne transformere bilder av en viss størrelse

2019.04.03

INF2310

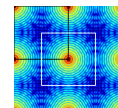
23 / 39

Framvisning av amplitudespekteret I/II

- Siden $F(u,v)$ er periodisk med periode N , er det vanlig å forskyve spekteret slik at origo ($u=v=0$) ligger midt i bildet
 - Bytte kvadranter
 - [eller pre-multiplisere $f(x,y)$ med $(-1)^{x+y}$]



$f(x,y)$
 $f(x,y)$: billedomenet



$|F(u,v)|$
 $F(u,v)$: frekvensdomenet
 $|F(u,v)|$ kalles spekteret til $f(x,y)$
 (amplitudespekteret)
 ("Powerspekteret": $|F(u,v)|^2$)

2019.04.03

INF2310

24 / 39

Framvisning av amplitudespekteret II/II

Skalering av verdier:

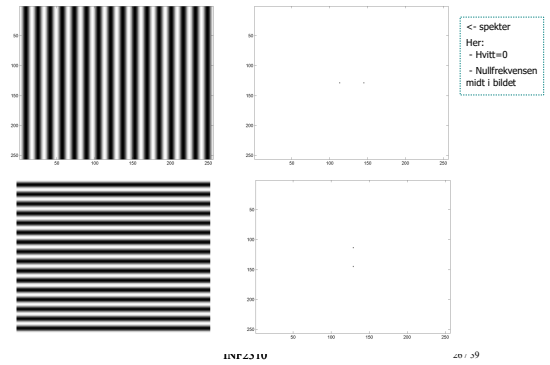
- Ofte stor dynamikk i $|F(u,v)|$ (kan ha høye verdier)
- Vanlig å benytte logaritmisk skala
 - Vi er mer interessert i størrelsesforhold i amplitude mellom frekvenser enn absolutt forskjell
 - $g(u,v) = \log(|F(u,v)|)$, som så eventuelt skaleres/affin-transformeres slik at man får gråtoner mellom 0 og 255 (8 bit)

2019.04.03

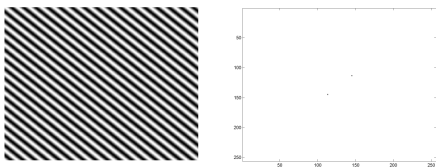
INF2310

25 / 39

Eksempler



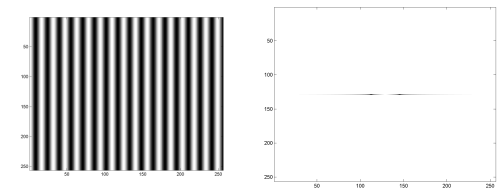
Eksempel – "skrå" frekvens



INF2310

27 / 39

Eksempel - diskontinuitet



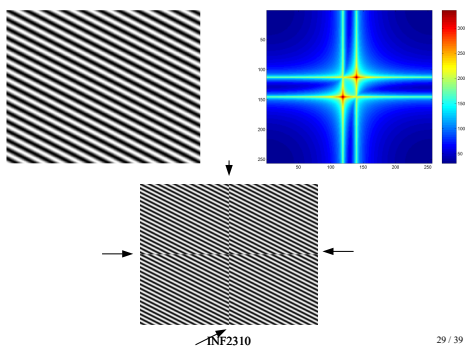
Ved å repetere bildet, ser vi tydelig kanter:



INF2310

28 / 39

Eksempel – diskontinuitet II



INF2310

29 / 39

Eksempel - vanlige objektformer

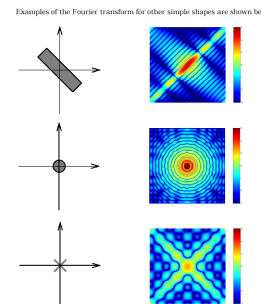
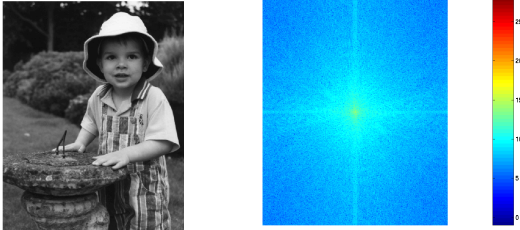


Figure 7-4. Fourier Transforms of Some Simple Shapes

INF2310

30 / 39

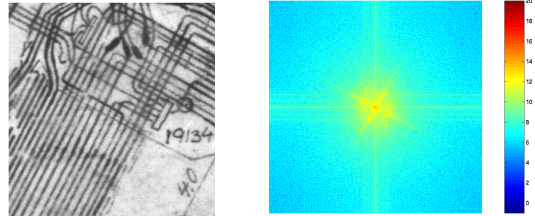
Eksempel – "vanlig" bilde



INF2310

31 / 39

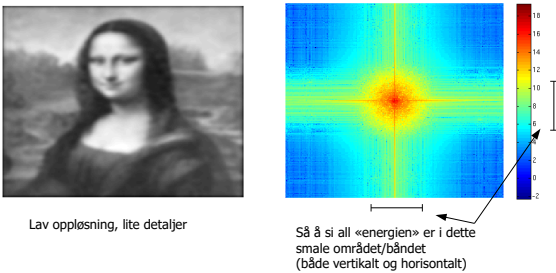
Eksempel - retningsdominant



INF2310

32 / 39

Eksempel - smal båndbredde



Lav oppløsning, lite detaljer

Så å si all «energien» er i dette smale området/båndet (både vertikalt og horisontalt)

2019.04.03

INF2310

33 / 39

Noen observasjoner ..

- Vanligvis størst bidrag/mest energi i spekteret for lave verdier av u, v
- Bidrag langs u - og v -aksen fordi bildet er implisitt periodisk og vi har diskontinuiteter langs kantene
- Linjestrukturer i gitt retning i bildedomenet har linjestruktur normalt på retningen i Fourier-domenet

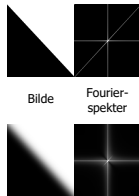
2019.04.03

INF2310

34 / 39

.. og noen observasjoner til

- Skarp kant:
 - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
 - Mange Fourier-koeffisienter er $\neq 0$
 - Bredt bånd i Fourier-domenet
- "Blurret" kant:
 - Tilsvarer færre sinusoider
 - Smalere bånd i Fourier-domenet
- Tommelfingerregler:
 - Smal struktur i bildedomenet : Bred struktur i Fourier-domenet
 - Bred struktur i bildedomenet: Smal struktur i Fourier-domenet
 - Linjestruktur i retning θ i bildedomenet: Linjestruktur i retning $\theta \pm 90^\circ$ (normalt på) i Fourier-domenet

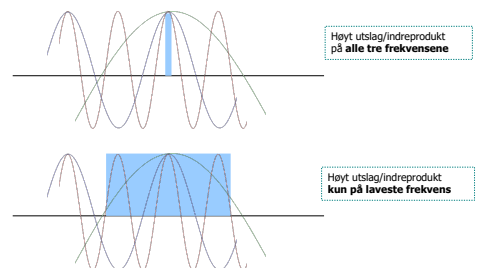


2019.04.03

INF2310

35 / 39

Intuisjonsbygging rundt smal struktur i bildedomenet -> bred struktur i Fourier-domenet, og omvendt



2019.04.03

INF2310

36 / 39

Implementasjon av DFT

- Beregning av $F(u,v)$ for én u,v : $O(N^2)$
- Beregning for hele bildet: $N \times N$ $F(u,v)$: $O(N^4)$
- Finnes en algoritme for rask beregning, 2D FFT (Fast Fouriertransform)
 - Benytter at Fourier-transformen er separabel i to 1D transform
 - Bruker bilder (eller delbilder) med størrelse 2^k (k er heltall)
 - Har orden $O(N^2 \log_2 N)$

2019.04.03

INF2310

37 / 39

Fourier-transform i Matlab/Octave

- `F = fft2(f);` % Gjør en 2D DFT-transform
- `f = ifft2(F);` % .. og den inverse transformen (obs: mulige spor av imaginære avrundingsrester)
- `F_r = real(F);` % Realdelen, altså cosinus-basis-bidragene
- `F_i = imag(F);` % Imaginærdelen, altså sinus-basis-bidragene
- `F_s = abs(F);` % Fourier-spekteret
- `F_p = angle(F);` % Fasen
- `F_r(u+1,v+1);` % Gir "cosinus-bidragene" for frekvens u,v
- `F_r(1,1);` % Gir "DC-komponenten" / nullfrekvensen
- `fftshift` og `ifftshift`: Flytter kvadranten slik at nullfrekvensen er i midten av bildet, samt omvendt
- `imagesc(fftshift(log(F_s)), [0 max(log(F_s(:)))]);` % Her: Viser alle verdier <0 som sort

2019.04.03

INF2310

38 / 39

Oppsummering

- Sinus-funksjoner
 - frekvens/periode, amplitude og fase
 - dekomponere $A \sin(\theta + \phi)$ i sin- og cos-komponent
 - 1D og 2D
- Diskret Fourier-transform
 - bildet beskrevet med cos/sin-basisbilder
 - kompleks representasjon
 - cos- og sin-ledd som reell- og imaginær-komponent
 - implisitt periodisitet
 - utslag i diskontinuitet \rightarrow "ekstra" frekvenser
 - fremvisning av spekteret $|F(u,v)|$
 - tommelfingerregler

2019.04.03

INF2310

39 / 39