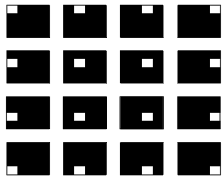
INF2310 – 10. april 2019
Diskret Fouriertransform – del II

- Kjapp repetisjon
- Konvolusjonsteoremet
- Filtre og filtrering i frekvensdomenet
- Bruk av vinduer

Repetisjon
Basis-bilder



Sort er 0, hvit er 1.

Ortogonal basis for alle 4x4 gråtonebilder.

Eksempel:

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

= 1*  + 3*  +…+ 6* 

En alternativ basis (Fourier)

- Bildene

$$\cos(\frac{2\pi(ux+vy)}{N}) \qquad \sin(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N})$$

- med frekvensene

u = 0,1,…,N-1
v = 0,1,…,N-1

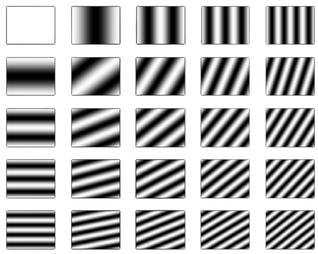
- Alle digitale gråtonebilder av størrelse NxN kan representeres ved en vektet summasjon av disse NxN sinus- og cosinus-bildene (basisbilder/basisvektorer)

Denne basisen er også ortogonal, sett bort i fra duplikat-komponentene grunnet symmetriene og antisymmetriene til cos og sin (noe vi kommer til om litt)

Ved ikke-kvadratiske bilder: cos(2π(ux/M+vy/N)) sin(-2π(ux/M+vy/N))

Basisbilder - cosinus

v →
u ↓



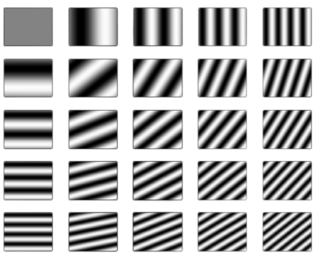
… til v = N-1

.
.
til u = N-1

I illustrasjonen indikerer sort -1 og hvitt 1

Basisbilder - sinus

v →
u ↓



… til v = N-1

.
.
til u = N-1

I illustrasjonen indikerer sort -1 og hvitt 1

2D diskret Fouriertransform (DFT)

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x,y)\, e^{-2j\pi(ux/N+vy/M)}$$

Husk at $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$, slik at vi ender opp sin/cos-basisen vi er vant med:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x,y)\Big[\cos\big(2\pi(ux/N+vy/M)\big) + j\sin\big(-2\pi(ux/N+vy/M)\big)\Big]$$

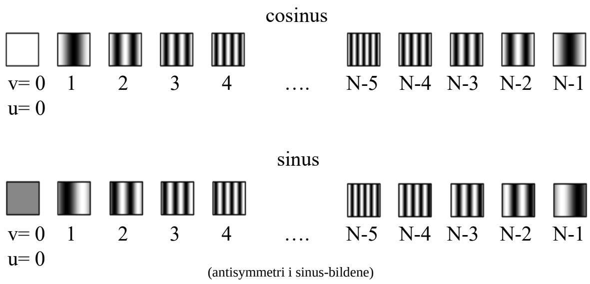
Den inverse transformen:

$$f(x,y) = \frac{1}{NM}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} F(u,v)\, e^{2j\pi(ux/N+vy/M)}$$

Litt repetisjon om DFT

- Fouriertransformen F(u,v) er periodisk:
  F(u,v)=F(u+kN,v+kN), k heltall
- Bildet f(x,y) implisitt periodisk: f(x,y)=f(x+kN,y+kN)
- Amplitudespekteret er gitt ved |F(u,v)|
- Konjugert symmetri: Hvis f(x,y) er reell, er F(u,v)=*F(-u,-v) og altså |F(u,v)|=|F(-u,-v)|
- Ofte forskyver spekteret med N/2 for å få origo (u=v=0) midt i bildet
- 2D DFT er separabelt i to 1D DFT
- Shift-teoremet: $f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\, e^{-j2\pi(ux0+vy0)/N}$

Symmetri i basisbildene



Konvolusjonsteoremet

$$f(x,y) \star h(x,y) \iff F(u,v) \cdot H(u,v)$$

Konvolusjon i bildedomenet ⇔ Punktvis multiplikasjon i frekvensdomenet

Det motsatte gjelder også:

$$f(x,y) \cdot h(x,y) \iff F(u,v) \star H(u,v)$$

Punktvis multiplikasjon i bildedomenet ⇔ Konvolusjon i frekvensdomenet

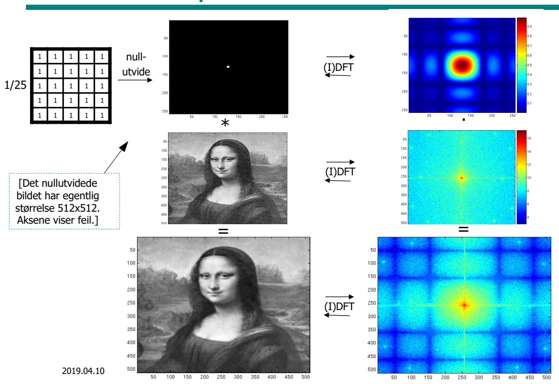
Egentlig snakk om en «sirkelkonvolusjon»

Diskrete tilfellet:
Elementvis produkt av de komplekse matrisene F og H

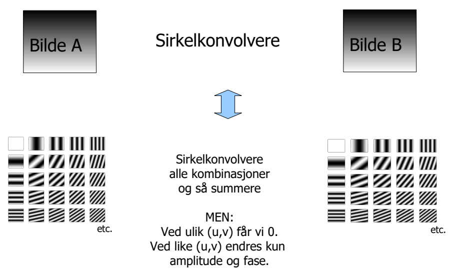
Anvendelser

- Analyse av konvolusjonsfiltre
  - Fourier-transformen til et filter h gir oss innblikk i *frekvensresponsen* til filteret
- Filterdesign
  - Kan designe filter i både frekvensdomenet og bildedomenet
  - Begge kan implementeres som konvolusjon i bildedomenet, eller som multiplikasjon i frekvensdomenet
  - (Husk: F og H må ha samme størrelse: Nullutvide)
- Implementasjon
  - Store filtre kan implementeres raskere i frekvensdomenet

Eksempel: Middelverdifilteret



Konvolusjonsteoremet: Tommelfingerforklaring



Å (sirkel)konvolvere et bilde med en av basisbildene gir som resultat det samme basisbildet dog med mulig endret amplitude og fase

Konvolusjonsteoremet mer formelt (1D)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DFT}_k(x \circledast y) &\triangleq \sum_{n=0}^{N-1} (x \circledast y)_n e^{-j2\pi nk/N} \\
&\triangleq \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(n-m)e^{-j2\pi nk/N} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{y(n-m)e^{-j2\pi nk/N}}_{e^{-j2\pi mk/N}Y(k)} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi mk/N}\right) Y(k) \quad \text{(by the Shift Theorem)} \\
&\triangleq X(k)Y(k)
\end{aligned}
$$

Sirkelkonvolusjon

(Kopi fra dsprelated.com)

Design i romlige domenet og filtrering i frekvensdomenet

Har en filterkjerne og vil implementere filtreringen i frekvensdomenet:

1. Beregn DFT (fft) av bildet
2. Beregn DFT (fft) av filterkjernen (med evt nullutvidelse)
3. Multipliser de to transformerte matrisene elementvis
4. Transformer resultatet tilbake til bildedomenet vha. invers DFT (IDFT, ifft)

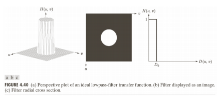
- Husk at filteret og bildet må ha samme størrelse (nullutvide filterkjernen)
  - Husk at vi snakker sirkelkonvolusjon (må nullutvide mer [også bildet] om vi ønsker alternativ randhåntering)

Filterdesign i Fourier-domenet
Generelt

- Vi ønsker reelle konvolusjonskjerner
  => (konjugert) symmetrisk i Fourierdomenet
- Ofte er alle **verdiene til filteret mellom 0 og 1**;
  0 fjerner og 1 bevarer den aktuelle frekvensen
- Hvis nullfrekvensen (u=0,v=0), «DC», i filteret er 1 så bevares bildets middelverdi
  - Vi viste forrige uke at DC er summen av gråtoneverdiene
  - Hvis DC i filteret er 1 så vil DC i ut-bildet bli lik DC i inn-bildet, altså vil summen av gråtoneverdiene bevares

Filterdesign i frekvensdomenet
Lavpassfiltre

- Slipper bare gjennom lave frekvenser (mindre enn en grense D_0 som kalles filterets **cut-off-frekvens**)
  - D_0 oppgis ofte som et tall mellom 0 og 1; cut-off for u og v = $D_0N/2$
- Enkelt (også kalt ideelt) lavpassfilter:



$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & D(u,v) \le D_0 \\ 0, & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \frac{\sqrt{(u-N/2)^2 + (v-N/2)^2}}{(N/2)}$$

- (Ordet "ideelt" kommer fra om H(u,v) var enten 0 eller 1 for alle mulige frekvenser u og v, ikke kun 0,1,..N-1. Dette er et urealiserbart filter, da filterkjernestørrelsen da vil gå mot uendelig)

MATLAB-eksempel: Enkelt/ideelt lavpassfilter

```
f = double(imread('..'));
[M,N] = size(f);
H = zeros(M,N);
D0 = 0.2;

for u = 0:M-1
  for v = 0:N-1
    if sqrt( ((u-floor(M/2))/(M/2))^2 + ...
            ((v-floor(N/2))/(N/2))^2 ) <= D0
      H(u+1,v+1) = 1;
    end
  end
end

F = fftshift( fft2(f) );
g = real( ifft2( ifftshift( F.*H ) ) );  % Fjern eventuelle imaginærtall grunnet avrundingsfeil
imagesc(g, [0 255]);
```


Eksempler - ideell lavpass

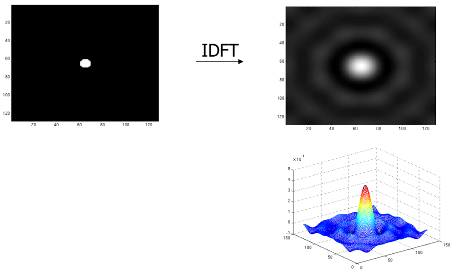
Original

D_0=0.2

D_0=0.3

Se på bildene i god nok oppløsning (du skal se stripe/ringing-effekter i de to til høyre).

Romlig representasjon av "ideelt" lavpassfilter



(trunkert sinc-funksjon)

- Vi får en «ringing»-effekt i bildet
  - Og husk tommelfingerregel om utstrekning i Fourier- og bilde-domenet

Butterworth lavpassfilter

- «Glattere» funksjoner brukes til å redusere ringing-effekten
- F.eks. Butterworth lavpassfilter av orden *n*:

$$H(u,v) = \frac{1}{1+\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$$

- Her vil D_0 beskrive punktet der H(u,v) har falt til halvparten av sin maksimumsverdi
  - Lav filterorden (*n* liten): H(u,v) faller langsomt: Lite ringing
  - Høy filterorden (*n* stor): H(u,v) faller raskt: Mer ringing
- Andre funksjoner kan også brukes, f.eks. Gaussisk, Bartlett, Blackman, Hamming, Hanning

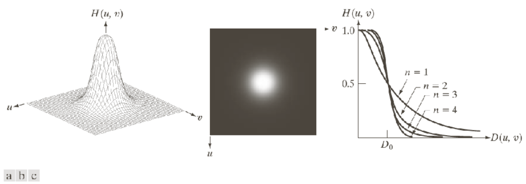


FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Eksempler Butterworth-lavpass

D_0=0.2

n=11 n=41 n=61

Gaussisk lavpassfilter

- Gaussisk lavpassfilter med spredning D_0 er definert som:

$$H(u,v) = e^{\frac{-D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

altså en 2D normalfordeling (uten konstantfaktoren) med DC som forventning og D_0 som standardavvik (i alle retninger, ingen kovarians).

- H(0,0) er 1 og H er strengt avtagende i alle retninger ut fra DC.
- Standardavviket angir avstanden fra DC til punktet der H er ≈0,6.
- 2D IDFT-en av et Gaussisk lavpassfilter er også Gaussisk.
  - Får ingen ringing i bildedomenet!

Gaussisk lavpassfilter

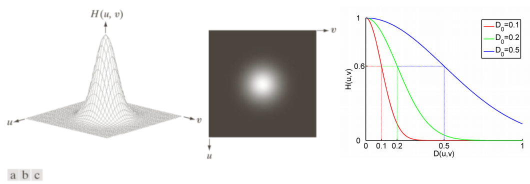


FIGURE 4.47 (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0.

Husk tommelfingerregelen:
Smal/bred struktur i bildet ⇔ Bred/smal struktur i Fourier-spekteret

Høypassfiltrering

- Et høypassfilter kan defineres ut fra et lavpassfilter:

$$\boxed{H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)}$$

- Ideelt høypassfilter:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u,v) \le D_0 \\ 1 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Butterworth høypassfilter:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u,v)]^{2n}}$$

- Gaussisk høypassfilter:

$$H(u,v) = 1 - e^{\frac{-D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

Båndpass- og båndstoppfiltere

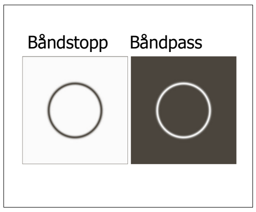
- Båndpassfilter: Slipper gjennom kun energien i et bestemt frekvensbånd $<D_{low}, D_{high}>$ (eller $<D_0-\Omega, D_0+\Omega>$)
- Båndstoppfilter: Fjerner energi i et bestemt frekvensbånd $<D_{low}, D_{high}>$

- Butterworth båndstoppfilter:

$$H_s(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{\Omega D(u,v)}{D(u,v)^2 - D_0^2}\right]^{2n}}$$

- Butterworth båndpassfilter:

$$H_p(u,v) = 1 - H_s(u,v)$$



Notch-filtre

- Slipper igjennom (notch-passfiltre) eller stopper (notch-stoppfiltre) energien i mindre predefinerte området i Fourier-spekteret.
- Også disse kan bruke de samme overgangene:
  - Ideelt, Butterworth, Gaussisk (eller én av mange andre typer).
- + Kan være svært nyttige.
- - Ofte trengs interaktivitet for å definere de aktuelle områdene.

Eksempel: Notch-stoppfilter

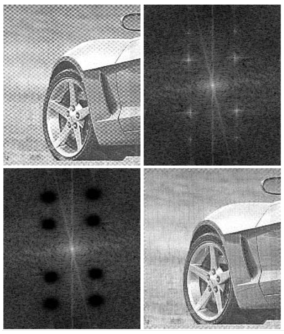
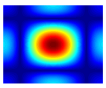


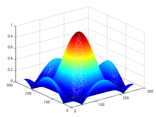
Fig. 4.64 i DIP

Analyse av filtre
Frekvensresponsen til noen vanlige filtre

1/9

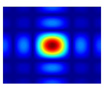
1	1	1
1	1	1
1	1	1

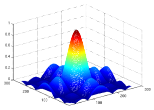




1/25

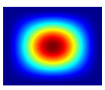
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

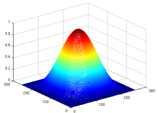




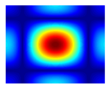
1/16

1	2	1
2	4	2
1	2	1



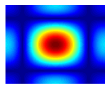


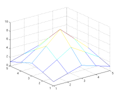
1	1	1
1	1	1
1	1	1

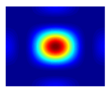


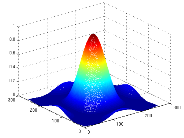
* x

1	1	1
1	1	1
1	1	1







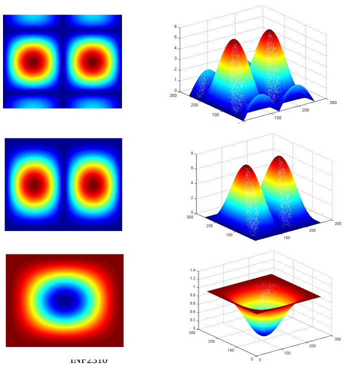


Høypassfiltre / båndpassfiltre

1	0	-1
1	0	-1
1	0	-1

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

-1	-2	-1
-2	12	-2
-1	-2	-1



Prewitt-filteret

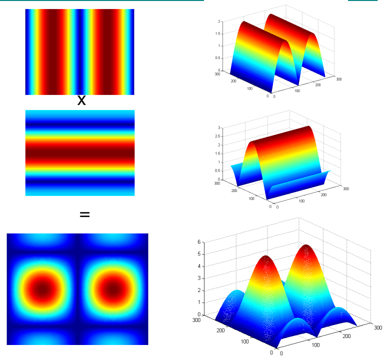
1	0	-1

*

1
1
1

=

1	0	-1
1	0	-1
1	0	-1



Når er filtrering raskest i frekvensdomenet?

- Anta bildet har størrelse N×N, filterkjernen n×n
- Filtrering i bildedomenet krever N^2n^2 multiplikasjoner og tilsvarende addisjoner
- Filtrering i frekvensdomenet:
  - FFT av bildet og filterkjernen: 2* $O(N^2 \log_2 N)$
  - Multiplikasjon i frekvensdomenet: N^2 multiplikasjoner
  - Inverstransform av resultatet : $O(N^2 \log_2 N)$
- Filtrering i frekvensdomenet raskere når filteret er stort ($n^2 >> \log_2 N$)

«Korrelasjonsteoremet»

$$f(x,y) \circ h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)^* \cdot H(u,v)$$

- Korrelasjon i bildedomenet ⇔ Multiplikasjon (med $F^*(u,v)$) i frekvensdomenet
- Med $F(u,v)^*$ menes den kompleks-konjugerte til F(u,v)
- Det motsatte gjelder også:

$$f(x,y)^* \cdot h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \circ H(u,v)$$

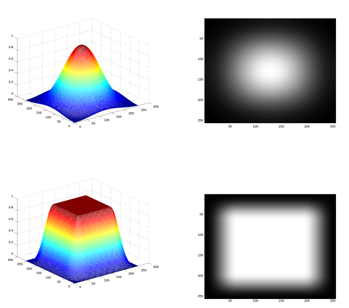
- Brukes f.eks. til templatmatching

Bortsett fra komplekskonjugeringen, *, er dette helt likt konvolusjonsteoremet!

Bruk av vindusfunksjoner

- Må se på bildet som periodisk
  => Det oppstår diskontinuiteter i kantene av bildet
  => «kunstige» bidrag på aksene i spekteret
- For å begrense slike høyfrekvente bidrag kan man bruke en vindusfunksjon og vekte dataene før DFT beregnes
  - Vindusfunksjonene modifiserer pikselverdiene slik at de går mot null i enden av sekvensene
  - Lag $f_w(x,y)=f(x,y)w(x,y)$
  - Ta DFT av $f_w(x,y)$
- "Bildet" kan være en liten del av et større bilde, jfr egenskapsuttrekning

Eksempler på vindusfunksjoner



"window function"
"apodization"
"tapering"

← "Hamming-vindu."

```
h = hamming(N);
w = h*h';
fw = w .* f;
```

← "Tukey-vindu."

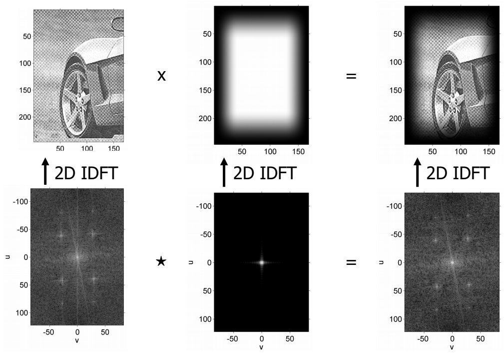
```
h = tukeywin(N);
w = h*h';
fw = w .* f;
```

Effekten av vinduer

- Hvis vi bruker vindusfunksjon til å redusere effekten av bildekantene i spekteret gjør vi $f_w(x,y)=f(x,y)w(x,y)$ *før* FFT
- Dette gjør at bidragene langs aksene i Fourier-spekteret reduseres, men vi påvirker også andre frekvenser i bildet
- Effekten av en multiplikasjon i bildedomenet er en konvolusjon i frekvensdomenet (konvolusjonsteoremet)
  - Multiplikasjon med en "bred klokkefunksjon" i bildedomenet er ekvivalent med en konvolusjon av en "smal klokkefunksjon" i frekvensdomenet
  - Bruk av vindusfunksjon gir en "blurring" av spekteret

Jfr. konvolusjonsteoremet

Eksempel, bruk av vindusfunksjon



Vindusfunksjoner

- Det finnes **mange typer vindusfunksjoner**
- Ofte defineres de i 1D og utvides til 2D ved matrisemultiplikasjon:
  - 1D samplet vindusfunksjon *h* (kolonnevektor) gir 2D-en ved hh^T
- Forrige eksempel benyttet *Tukey-vinduet*, som i 1D er definert som:

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\pi\left(\frac{2n}{\alpha(N-1)}-1\right)\right)\right] & \text{when } 0 \leqslant n \leqslant \frac{\alpha(N-1)}{2} \\ 1 & \text{when } \frac{\alpha(N-1)}{2} \leqslant n \leqslant (N-1)(1-\frac{\alpha}{2}) \\ \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\pi\left(\frac{2n}{\alpha(N-1)}-\frac{2}{\alpha}+1\right)\right)\right] & \text{when } (N-1)(1-\frac{\alpha}{2}) \leqslant n \leqslant (N-1) \end{cases}$$

  - Parameteren α kontrollerer skarpheten til overgangen;
    0 gir et rektangulært vindu, 1 gir et glatt vindu kalt *Hann vindu*
- Vindusfunksjoner kan også **brukes i Fourier-domenet**,
  da til å **definere overgangene i et filter**
  - Butterworth og Gaussisk er vindusfunksjoner
  - Alle vindusfunksjoner kan brukes i begge domener

Oppsummering

- Konvolusjonsteoremet:
  (Sirkel)konvolusjon i bildedomenet er ekvivalent med elementvis multiplikasjon i frekvensdomenet, og omvendt
- Anvendelser
  - Design av filtre i frekvensdomenet
    - Lavpass, høypass, båndpass, båndstopp, notch
    - I praksis: La H være symmetrisk (om nullfrekvensen) og reell
      - Konjugert symmetri; $H(i,j) = H^*(-i,-j)$ -> reelle filtre/utbilder
    - «Myke» overganger -> redusere ringing
  - Analyse av konvolusjonsfiltre (frekvensrespons)
  - Rask implementasjon av større konvolusjonsfiltre
- Vindusfunksjoner på (del)bilder før transformen
  - Redusere bidrag langs aksene, glatte F