
INF 2310 – Digital bildebehandling



Forelesning II 2020 Sampling og kvantisering

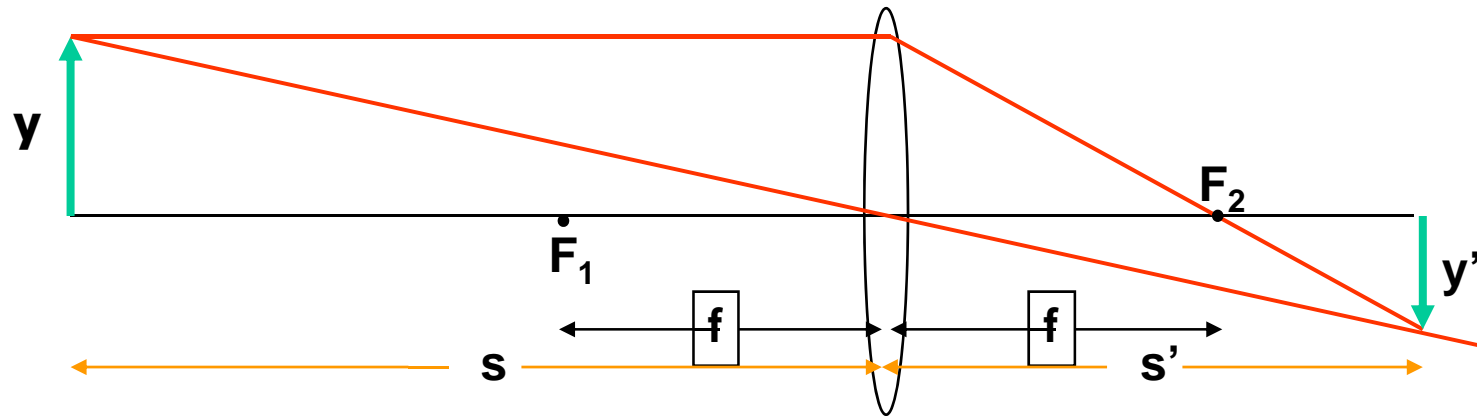
Fritz Albregtsen

Temaer i dag

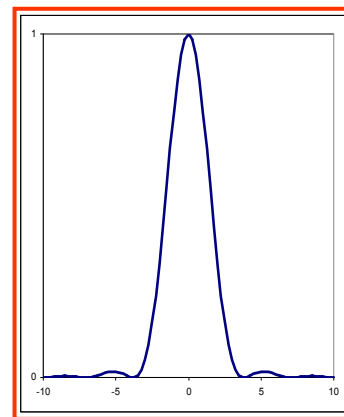
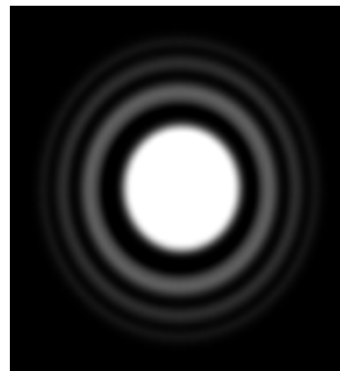
- Romlig oppløsning i bilder
- Sampling av bilder
- Kvantisering i av pikselintensiteter i bilder
- Avstandsmål i bilder

- Pensum: Kap. 2.3 - 2.5 (s 57 - 83) i DIP4E
 - med drypp fra Kap. 4 (frekvens, sampling, aliasing, ...)

Optisk avbildning



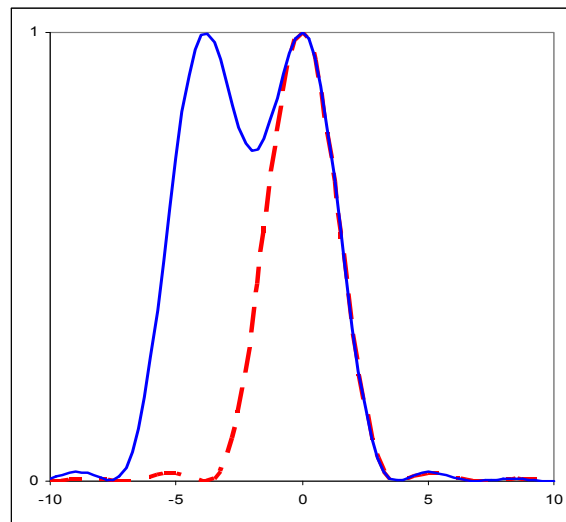
En punktkilde
avbildes som
en skive med
mørke og lyse
ringer rundt =>



(Punktspredningsfunksjon)
(PSF)

Mer om romlig oppløsning

- Romlig oppløsning angis ofte som hvor langt fra hverandre to punktkilder må være for at vi skal kunne skille dem.
- Romlig oppløsning angis som en vinkel, oftest gitt i radianer.

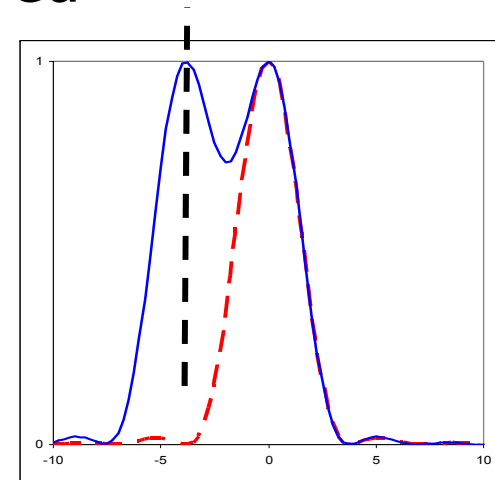


Rayleigh-kriteriet

- Anta at en "**perfekt**" linse har aperture-diameter D , og lysets bølgelengde er λ , begge gitt i samme enhet
- To punkter i et objekt kan akkurat adskilles i det kontinuerlige, analoge bildet hvis vinkelen mellom dem er gitt ved

$$\sin \theta = 1.22 \lambda / D \text{ radianer.}$$

- Dette er "Rayleigh-kriteriet".



Rayleigh-kriteriet, eksempel

$$y' = \frac{y f}{(s - f)}$$

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta$$

f=35mm og D=10mm

(Tilnærmet vanlig kamera)

s=5m

(Avstanden til det som avbildes)

$\lambda=500\text{nm} = 500 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

(500 nanometer => Grønt lys)

$$\tan \theta \approx \sin \theta = 1.22 \lambda / D = 6.1 \cdot 10^{-5}$$

(Rayleigh)

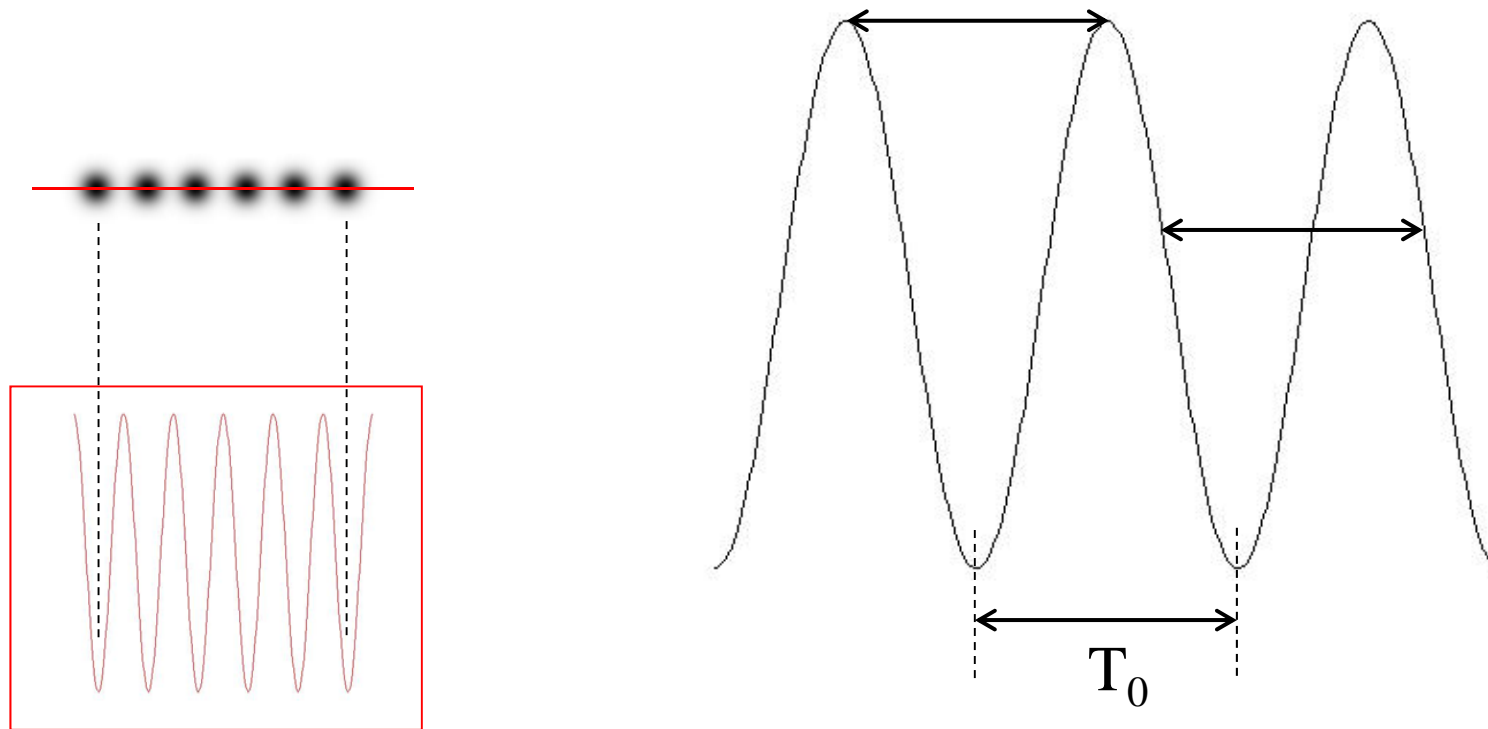
$$y = \tan \theta \cdot s \approx 3.05 \times 10^{-4} \text{ m} \approx \mathbf{0.3 \text{ mm}}$$

(I objektplanet)

$$y' = 0.3 \cdot 35 / (5000-35) \text{ mm} \approx \mathbf{2.1 \mu\text{m}}$$

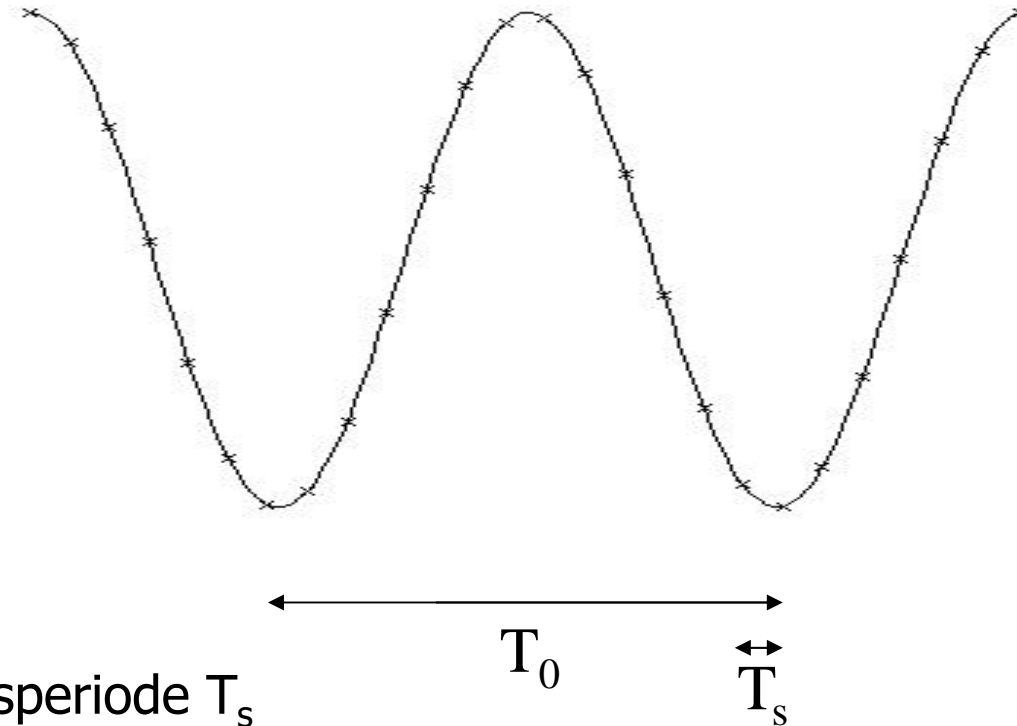
(I bildeplanet)

Romlig frekvens



- Periode T_0 (f.eks. i mm eller μm)
- Frekvens $f_0 = 1/T_0$ (med benevning "per mm" eller "per μm ")

Sampling av kontinuerlige signaler



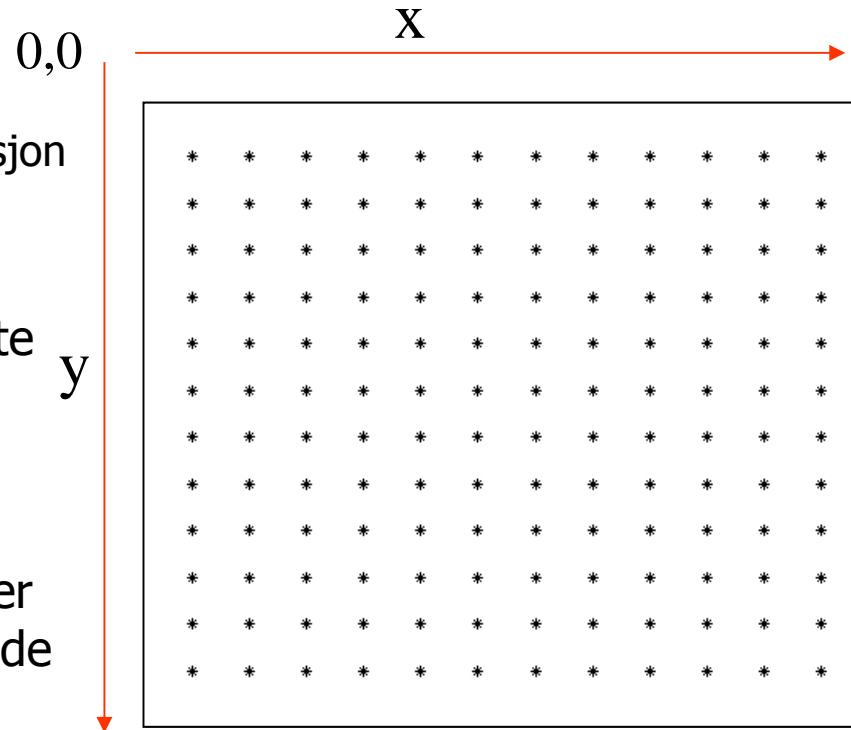
- Samplingsperiode T_s
- Signalets periode = T_0 ($\Rightarrow f_0 = 1/T_0$)
- Samplingsfrekvens $f_s = 1/T_s$ (også kalt samplingsrate)
- Hvor tett må man sample for å kunne rekonstruere signalet?

Samplingsteoremet (Shannon/Nyquist)

- Anta at det kontinuerlige bildet er båndbegrenset, dvs. det inneholder ikke høyere frekvenser enn f_{\max}
- Det kontinuerlige bildet kan rekonstrueres fra det digitale bildet dersom samplingsraten
$$f_s = 1/T_s > 2 f_{\max} \quad (\text{altså } T_s < 1/2T_0)$$
- $2 f_{\max}$ kalles Nyquist-raten
- I praksis oversampler vi med en viss faktor for å kunne få god rekonstruksjon

Sampling av bilder

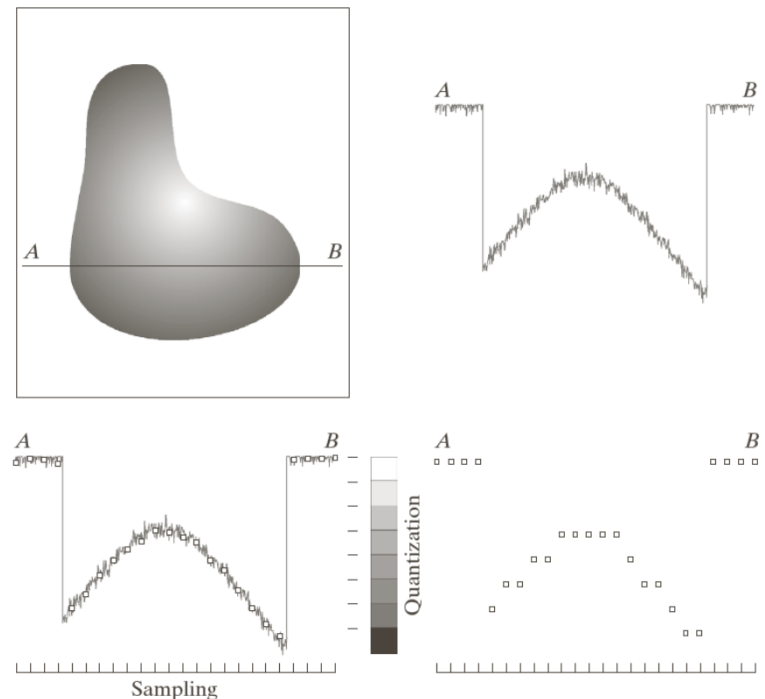
- Naturen er kontinuerlig
 - Et bilde er en kontinuerlig funksjon av to kontinuerlige variable
- Et digitalt bilde består av diskrete bildeverdier på et endelig 2D punktnett
- Sampling: Prosessen som plukker ut punkter fra et kontinuerlig bilde til et 2D punktnett



- For en viss **romlig oppløsning**, hvor tett må punktene i rutenettet ligge? (Hvor mange piksler pr. arealenhet?)

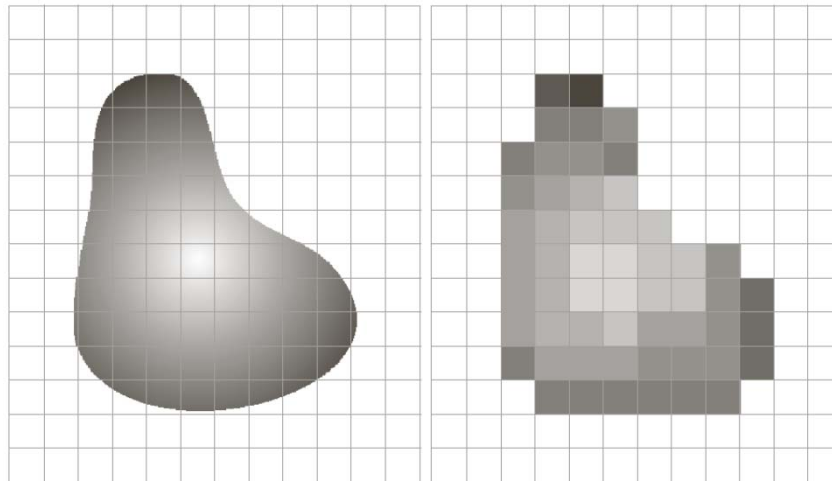
1D-sampling og kvantisering

- Analogt: En kontinuerlig variabel – intensitet finnes for alle (kontinuerlige) posisjoner.
- Digitalt: Intensiteten samples for diskrete posisjoner, og skaleres og avrundes (kvantiseres)



2D sampling og kvantisering

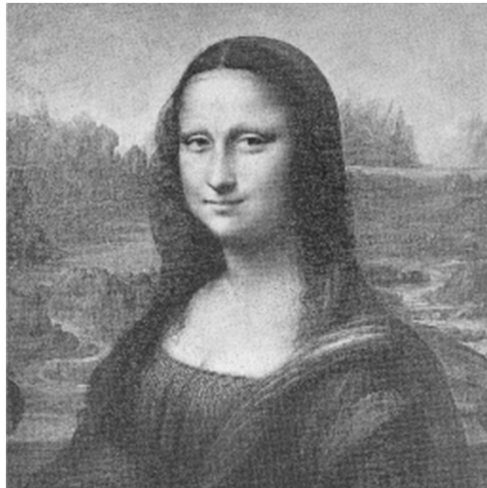
- Et kontinuerlig bilde projiseres på et detektor-array.
- Detektor-tettheten bestemmes av Nyquist-kriteriet.
- Hver detektor måler intensitet som et arealgjennomsnitt.
- Antall gråtoner bestemmes av ordlengden (antall bits).



a b

FIGURE 2.17 (a) Continuous image projected onto a sensor array. (b) Result of image sampling and quantization.

Romlig oppløsning, eksempler



256x256



128x128



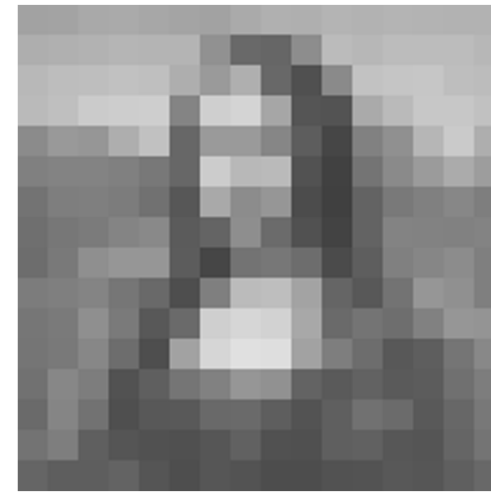
64x64

(Hvert tall i matrisen er her opptegnet som et kvadrat)

Romlig oppløsning sier noe om graden av fine detaljer som kan representeres i bildet



32x32



16x16

Redusert romlig oppløsning



32x32 piksler



256x256 piksler

Forskjellig antall piksler, men lik romlig oppløsning.

Undersampling/aliasing

- Undersampling (sample med lavere samplingsrate enn Nyquist-kriteriet) medfører **aliasing**.
- Ved undersampling forvrenges frekvensinnholdet og det digitale bildet inneholder ikke de samme frekvenser som det kontinuerlige bildet.
- Sampling av en sinusoid med for lav samplingsrate gir en diskret sinusoid med lavere frekvens.
- Alias-frekvensen er altså lavere enn sann frekvens.

1D aliasing-eksempel

- En sinusoid med periode $T=2\text{s}$.
- Samplet med uniform samplingsperiode $> 2\text{s}$.
- Gir en rekonstruert sinusoid med for lav frekvens.

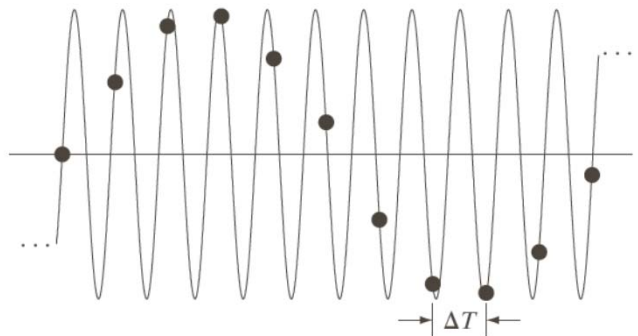
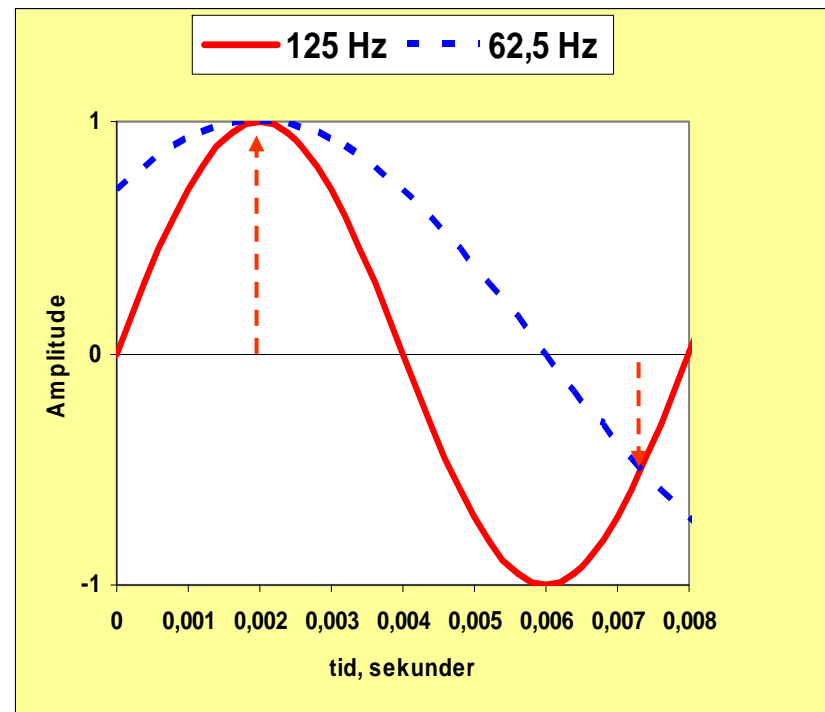


FIGURE 4.10 Illustration of aliasing. The under-sampled function (black dots) looks like a sine wave having a frequency much lower than the frequency of the continuous signal. The period of the sine wave is 2 s, so the zero crossings of the horizontal axis occur every second. ΔT is the separation between samples.

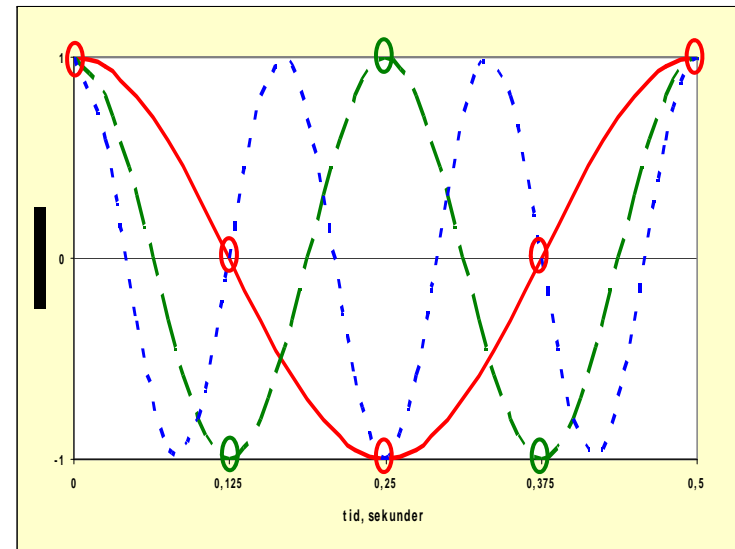
Undersampling og aliasing

- **Aliasing** betegner det fenomenet at en sinusoid ved for lav samplingsrate gir opphav til samme diskrete signal som en sinusoid med lavere frekvens.
- Vi sampler en $f = 125$ Hz sinus med $f_s = 1.5 f = 187.5$ Hz.
- Dette gir for eksempel sampler ved $t = 0.002$ og ved $t = 0.733$ (stiplede røde piler).
- Rekonstruksjon gir sinus med $f_a = 62.5$ Hz (stiplet blå kurve).
- Vi har fått en "aliasing".
- Merk at $f_a = f_s - f$ når $f < f_s < 2f$



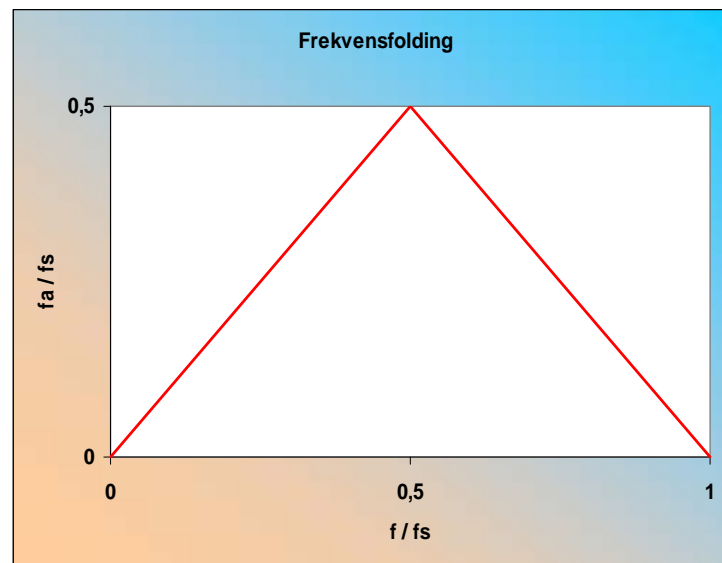
Frekvensfolding

- I figuren til høyre vises $\frac{1}{2}$ sek. av tre sinus-funksjoner med frekvenser 2, 4 og 6 Hz.
- Vi sampler alle tre funksjonene med en fast $f_s = 8\text{Hz}$
- Vi får rekonstruert tre sinusoider med hhv. $f = 2, 4$ og 2 Hz.
- Frekvenser f som er \leq halvparten av f_s blir rekonstruert til korrekt frekvens
- f mellom $\frac{1}{2} f_s$ og f_s , blir rekonstruert til $f_a = f_s - f$



Frekvensfolding

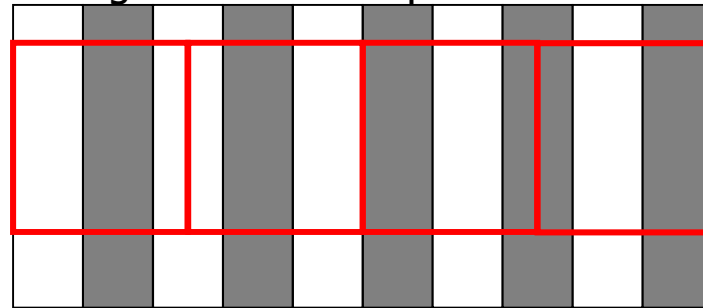
- Aliasfrekvens er gitt ved $f_a = f_s - f$ når $f < f_s < 2f$
- frekvenser under halvparten av f_s blir korrekt rekonstruert.
- frekvenser mellom $\frac{1}{2} f_s$ og f_s , blir rekonstruert til $f_a = f_s - f$



Et undersamplet Nyquist-stakitt ...

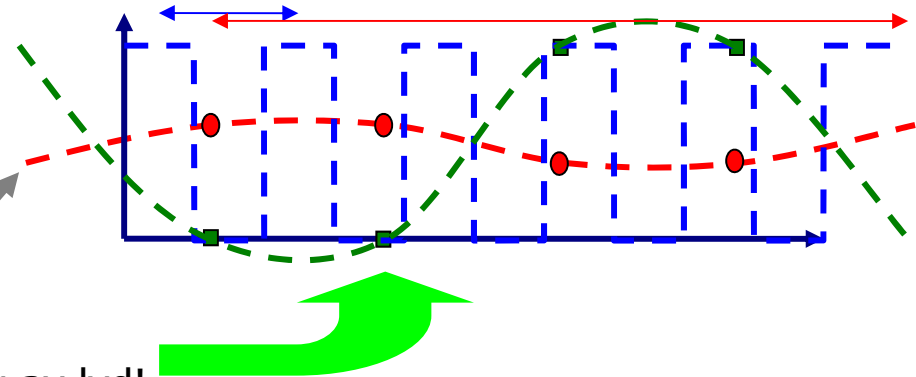
- Ta et analogt bilde av et stakitt med 5 sprosper og 5 mellomrom per meter.

- Vi har en periodisk struktur
 - $f = 5$ svingninger per meter
 - Periode $T = 20$ cm



- Vi må ha MINST to piksler per periode!

- Anta nå at pikslene svarer til $25 \cdot 25$ cm, dvs $f_s = 4$ sampler per meter.
- Finner gjennomsnitt i hvert piksel ...
 - Amplituden reduseres ...
 - Vi får aliasing, $f_a = |f_s - f| = |4 - 5| = 1$
 - Perioden $T_a = 1/f_a = 1$ meter



- Dette er annerledes enn ved sampling av lyd!

- I bildet får vi redusert amplitude i forhold til lydsampling
- Men vi får samme aliasingfrekvens
- Vi kan få en synlig faseforskyvning i bildet. Fase og faseforskyvning av lyden hører vi ikke!

Anti-aliasing

- Effekten av aliasing kan reduseres.
- Dette MÅ gjøres FØR samplingen.
- Hvis vi filtrerer bort de høyeste frekvensene først, vil det finnes færre eller ingen høye frekvenser som kan gi opphav til aliasing.
- Aliasing er en samplings-effekt.
- Aliasing kan IKKE fjernes *post* - sampling.
- Mange SW-pakker tilbyr "anti-aliasing" !
- Digitale kamera kan ha en "anti-alias"-funksjon.

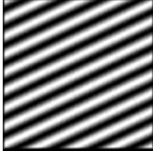

Anti-aliasing

- Ved *anti-aliasing* fjerner / demper vi de høyere frekvensene **før** vi sampler bildet



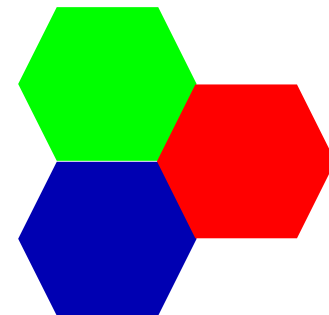
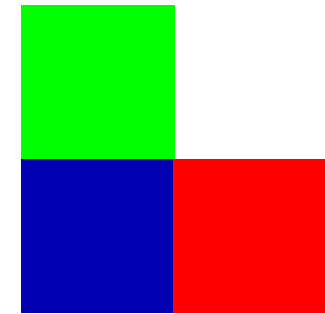
(Figurer fra ImageProcessingBasics.com)

Mer om reell sampling av bilder

- Når et kamera tar bilde av et objekt, vil hvert piksel i bildet inneholde lys målt fra hele det området som pikselen dekker
- Eksempel: La oss si at 1 piksel dekker det området som er vist til høyre, og at dette lille området inneholder noe fin-struktur:
- Dette representeres etter samplingen ved gjennomsnittlig lysstyrke i området:
- Vi har målt en middelværdi over et areal
 - Implisitt fjernet høyfrekvent bidrag
 - Vi har utført en "anti-aliasing" filtrering.

Samplingsmønster/skanningsmønster

- Vanligvis rektangulært/kvadratisk grid
 - Konnektivitets-problemer
(Merk: avstanden mellom diagonale punkter)
 - Avstandsmål
 - Mer om dette i morfologi-forelesningen
- Andre eksempler:
 - Hexagonalt grid
 - Varierende tetthet (f. eks. netthinnen)
 - Polarkoordinater (f.eks ultralyd)

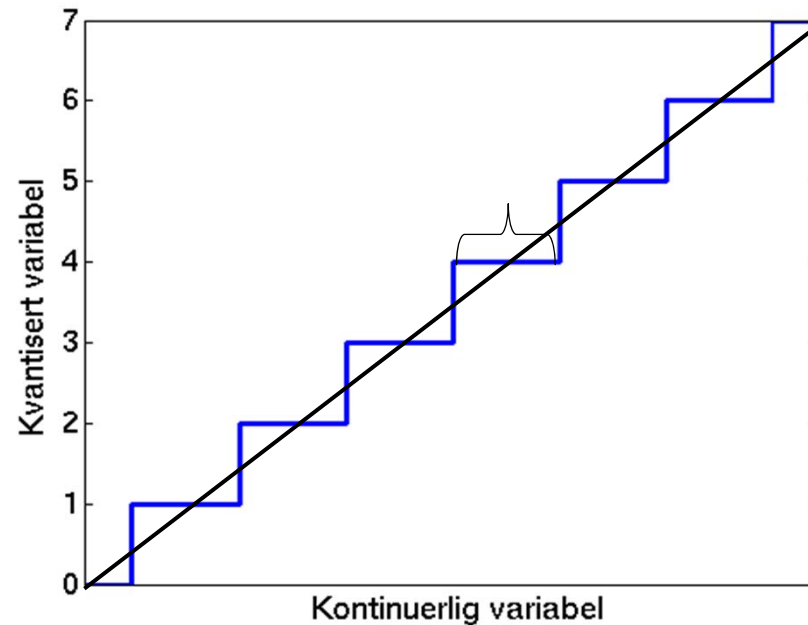


Kvantisering

- $f(x,y)$ er intensitet/lysstyrke i (x,y) og i naturen *kontinuerlig* variabel
- Når bilder skal lagres digitalt må man velge et *visst antall nivåer* (og hvor nivåene skal ligge)
- ***Kvantisering***: Prosessen som transformerer et kontinuerlig sampel $f_k(x,y)$ til et diskret sampel $f(x,y)$

Kvantisering, forts.

- Hvert piksel lagres vha. n bit
- Pikselet kan da inneholde heltallsverdier fra 0 til 2^n-1
- Eks 3bit:



- 8 bit er vanlig for gråtonebilder, $3 \cdot 8$ bit for fargebilder.

Kvantiseringsfeil

- Kvantiseringsfeil
 - Summen av hver piksels avrundingsfeil
- Kan velge intervaller og rekonstruksjonsintensiteter som minimerer feilen for et gitt bilde
 - => Ikke-uniform fordeling av kvantiseringsnivåer
- Sentrale stikkord:
 - Lagringsplass
 - Behov for presisjon/akseptabelt informasjonstap
 - Hardware-kompleksitet, eller fysiske begrensninger
- Merk: Fremvisning og videre bildeanalyse av det kvantiserte bildet stiller ulike krav til presisjon

Eksempel: Plassbehov

- Typisk kamera (6 megapiksel)
 - $3264 \times 1832 = 5,979,648$ piksler
 - RGB $\rightarrow 3 * 5,979,648 * 8 \text{ bit} = 143 \text{ Mb} = 18 \text{ MB}$
- Radarbilde fra ERS-satellitten:
 - Overføring fra satellitt kostbart
 - Dekker $100 \times 100 \text{ km}$
 - Pikseldekning $20 \times 20 \text{ m}$
 - 5000×5000 piksler
 - 8-bit: **25 MB**
 - 16 bit: **50 MB**
 - 32 bit: **100 MB**

Prefiks for lagringsbehov

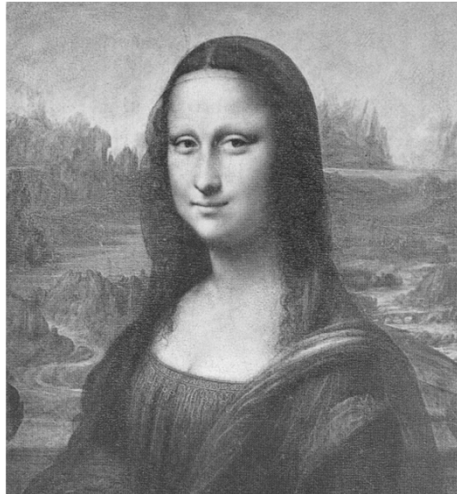
| Decimal | | | Binary | | |
|---------|-----|-----------|--------|----|----------|
| kilo | k/K | 10^3 | Kibi | Ki | 2^{10} |
| Mega | M | 10^6 | Mebi | Mi | 2^{20} |
| Giga | G | 10^9 | Gibi | Gi | 2^{30} |
| Tera | T | 10^{12} | Tebi | Ti | 2^{40} |
| Peta | P | 10^{15} | Pebi | Pi | 2^{50} |

- Elektroniske minner (RAM, ROM) er gitt i binære enheter
- Harddisk-kapasitet er gitt i desimale enheter.
 - Sektorstørrelsen på disk er binært (siden de mapper til RAM).
 - Forvirrende hybrider som flasminner med X GB, som ikke er $X \cdot 10^9$ byte eller $X \cdot 2^{30}$ byte, men $X \cdot 10^6 \cdot 1024$ byte
- Kapasiteten til en CD er alltid gitt binært.
- Kapasiteten til en DVD er gitt desimalt.
- Båndbredden gis desimalt, siden klokkeraten gis desimalt
 - (1 Mbit/s = 10^9 biter per sekund, 1 GHz = 10^9 sykler per sekund).

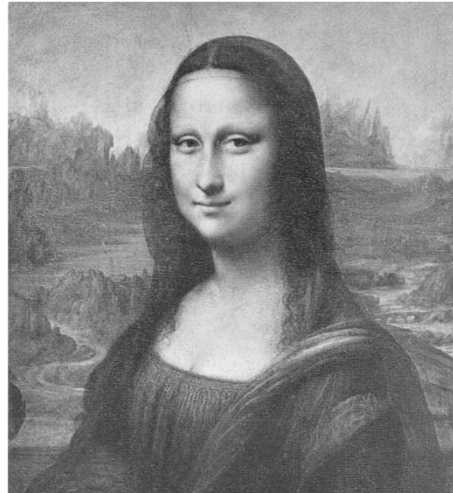
Krav til kvantiseringsnivåer

- Øyet vårt ser bare noen titalls gråtoner samtidig,
 - trenger vi da mer enn 256 nivåer (1 byte) pr. piksel?
- Tilfeller hvor *input*-intensitetsnivå varierer (for eksempel lysnivå ute og innendørs).
- Videre bildeanalyse kan kreve flere kvantiseringsnivåer
- Eksempler på datatyper som ulike sensorer leverer:
 - Byte (0-255): Mest vanlig
 - Unsigned short(16 bit): ERS SAR radarbilder vanlig format
 - 10 – 12 bit: MR-bilder (Magnetisk Resonnans)
 - 64 bit complex: ERS single look complex radarbilder (rådata) med amplitude og faseinformasjon

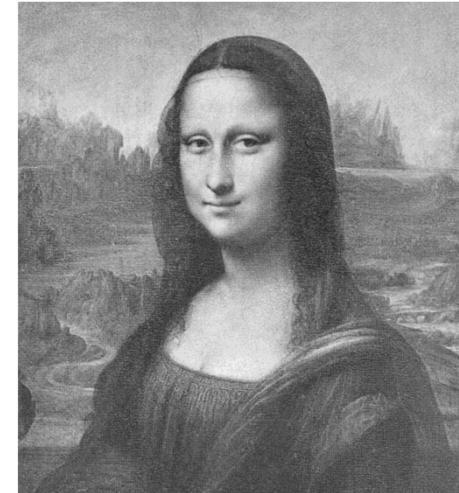
Eksempler - antall bit pr. piksel



8 bit



6 bit



4 bit



3 bit

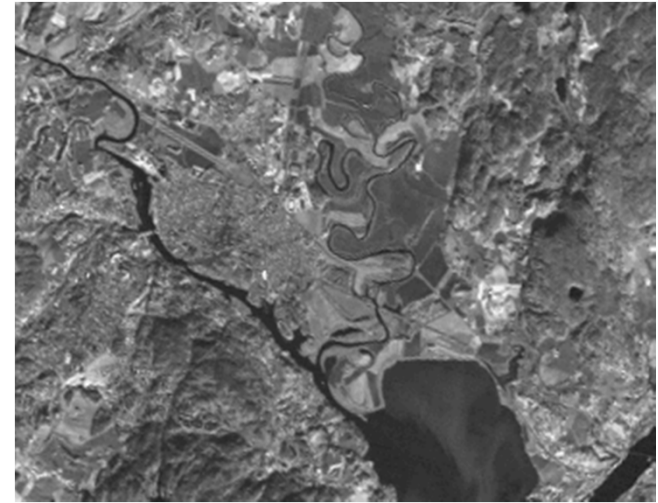
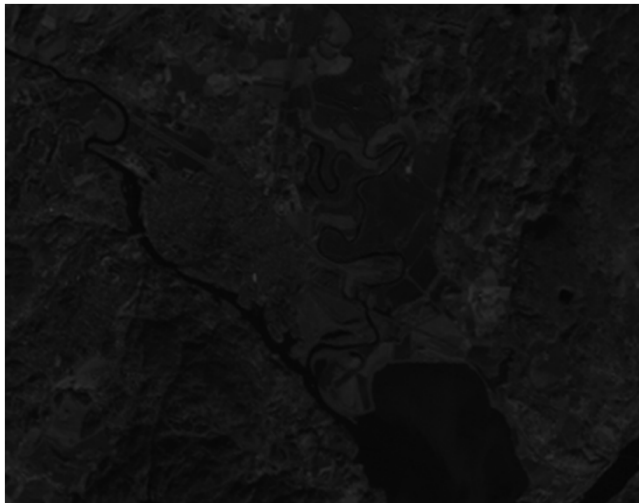


2 bit



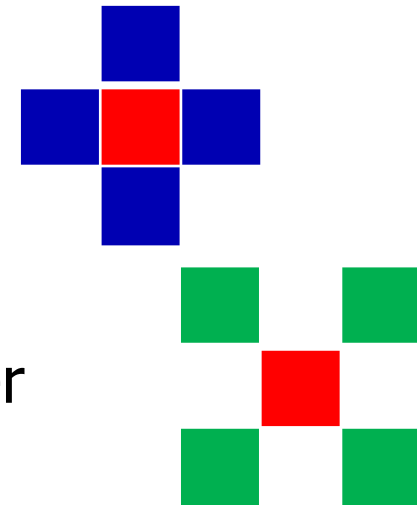
1 bit

Eksempel – varierende belysning



Naboer til piksler

- Et piksel p i posisjon (x,y) har flere nabo-piksler.
- 4-naboene $N_4(p)$ med koordinater $(x+1,y)$, $(x-1,y)$, $(x,y+1)$, $(x,y-1)$
- Diagonal-naboene $N_D(p)$ med koordinater $(x+1,y+1)$, $(x+1,y-1)$, $(x-1,y+1)$, $(x-1,y-1)$
- Tilsammen utgjør disse 8-naboene til p , $N_8(p)$.



Euklidsk avstand mellom piksler

- Gitt to piksler p, q i planet med koordinater $(x, y), (s, t)$
- Euklidsk avstand mellom p og q

- $D_e(p, q) = [(x-s)^2 + (y-t)^2]^{1/2}$

- I n dimensjoner: $D_e(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2}$

“City block” avstand mellom piksler

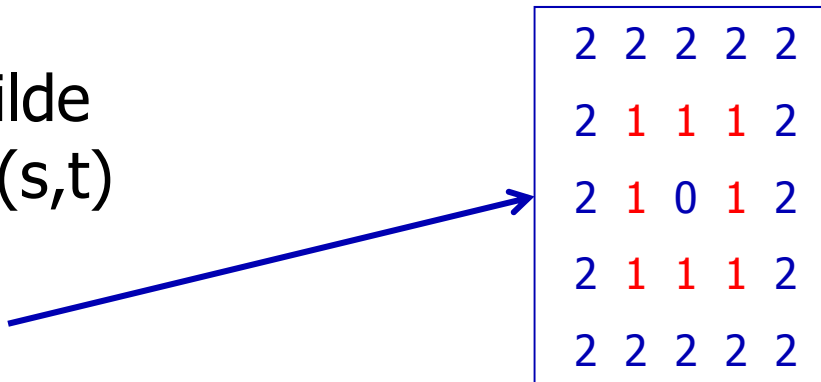
- Også kalt “Taxi-avstand”, “Manhattan-distance”, L_1
- Gitt to piksler p, q i et bilde med koordinater $(x, y), (s, t)$
- City-block avstand (D_4)
 - $D_4(p, q) = |x-s| + |y-t|$
 - Piksler med avstand 1 er 4-naboer til senterpikslet
 - $D_4(p, q)$ er lengden av den korteste 4-nabo veien fra p til q , men det kan finnes flere like lange veier!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 3 | 4 |

- I n dimensjoner:
$$D_4(p, q) = \sum_{i=1}^n |q_i - p_i|$$

Sjakk-avstand mellom piksler

- Også kalt Chebyshev-avstand, L_∞
- Gitt to piksler p, q i et bilde med koordinater $(x, y), (s, t)$
- Sjakk-avstand (D_8)
 - $D_8(p, q) = \max(|x-s|, |y-t|)$
 - Piksler med $D_8=1$ er 8-naboer til senterpikslet
 - $D_8(p, q)$ er lengden av den korteste 8-nabo veien fra p til q , men det kan finnes flere like lange veier!
- I n dimensjoner: $D_8(p, q) = \max |q_i - p_i|$



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Avstandsmetrikker

- Tre piksler p, q, z med koordinater (x, y) , (s, t) og (v, w)
- Avstandsfunksjonen $D(p, q)$ er en metrikk hvis
 - $D(p, q) \geq 0$ (*ikke-negativitet*)
 - $D(p, q) = 0$ hvis og bare hvis $p = q$ (*identitet*)
 - $D(p, q) = D(q, p)$ (*symmetri*)
 - $D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$ (*trekant-ulikhet*)

Avstandsmetrikker - II

- Gitt avstandsmålene D_4 og D_8 :

- **Q:** Tilfredsstill D_4 og D_8 alle kravene til en metrikk?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

- **Q:** Er $\text{floor}(D_e) = (\text{største heltall} \leq D_e)$ en metrikk?

(hint: er $D(p,z) \leq D(p,q) + D(q,z)$ langs diagonalen ...)

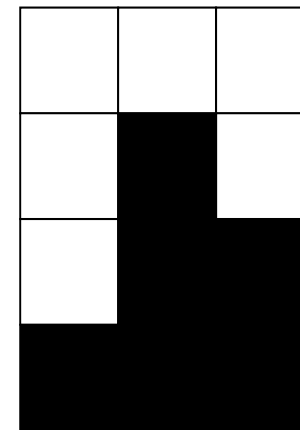
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |

Sentrale temaer i dag

- Romlig oppløsning
 - Punktspredningsfunksjon (PSF)
 - Rayleigh-kriteriet
 - Romlig frekvens
- Sampling
 - Samplingsteoremet (Shannon/Nyquist)
 - Aliasing
 - Anti-aliasing
- Kvantisering
 - Kvantiseringsfeil
 - Ikke-uniform fordeling av nivåer
- Avstandsmål, metrikker

Dette er Mona Lisa

Dette er Mona Lisa
genskapt i mosaik.
Forbenede reaktionære
bagtaler denne teknik.
12 sorte og hvite kvadrater
anbragt på rette sted!
Man påstår at noget i smilet
-- ikke helt kommer med.



Piet Hein