INF2310 - Fourier 1

25. mars 2020

- Sinus-funksjon i 1D og 2D
- 2D diskret Fouriertransformasjon (DFT)
- Neste uke:
    - Konvolusjonsteoremet
    - Filtre og filtrering i frekvensdomenet
    - Vindusfunksjoner

Introduksjon 1

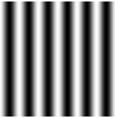
- Et gråtonebilde kan representeres ved:
  - Typisk: Matrise av gråtoneintensiteter

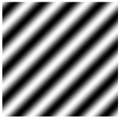
Introduksjon 1

- Et gråtonebilde kan representeres ved:
    - Typisk: Matrise av gråtoneintensiteter
    - Fourier: Vektet sum av sinuser og cosinuser med ulik *frekvens* og *orientering*

Introduksjon 1

- Et gråtonebilde kan representeres ved:
  - Typisk: Matrise av gråtoneintensiteter
  - Fourier: Vektet sum av sinuser og cosinuser med ulik *frekvens* og *orientering*





- Skifte av representasjon kalles ofte et *basis-skifte*

Introduksjon 2

Hvorfor ønsker vi å skifte basis?

Introduksjon 2

Hvorfor ønsker vi å skifte basis?

- Analyse:
    - Skarphet, orienteringsdominerte objekter, o.l
    - Fjerne/dempe periodisk støy
    - Kompresjon

Introduksjon 2

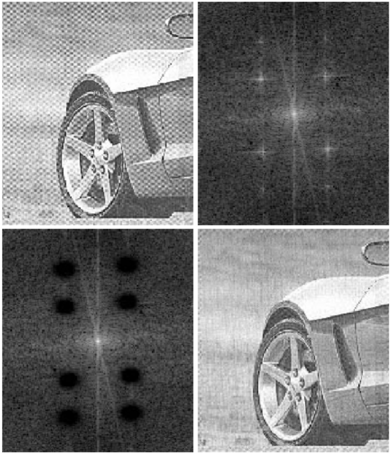
Hvorfor ønsker vi å skifte basis?

- Analyse:
    - Skarphet, orienteringsdominerte objekter, o.l
    - Fjerne/dempe periodisk støy
    - Kompresjon
- Egenskapsuttrekning, f.eks tekstur

Introduksjon 2

Hvorfor ønsker vi å skifte basis?

- Analyse:
  - Skarphet, orienteringsdominerte objekter, o.l
  - Fjerne/dempe periodisk støy
  - Kompresjon
- Egenskapsuttrekning, f.eks tekstur
- Neste uke:
  - Analyse og design av lineære filtre
  - Raskere implementasjon av større konvolusjonsfiltre



Fjerning/demping av periodisk støy, Figure 4.64 i DIP

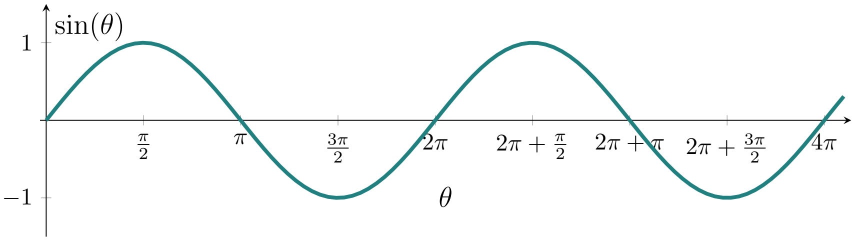
Funksjonen $\sin(\theta)$

Funksjonen $\sin(\theta)$:

- Svinger mellom 1 og -1 når θ varierer mellom 0 og 2π

Funksjonen $\sin(\theta)$:

- Svinger mellom 1 og -1 når θ varierer mellom 0 og 2π
- Svinger på samme måte når θ varierer mellom 2π og 4π, 4π og 6π osv

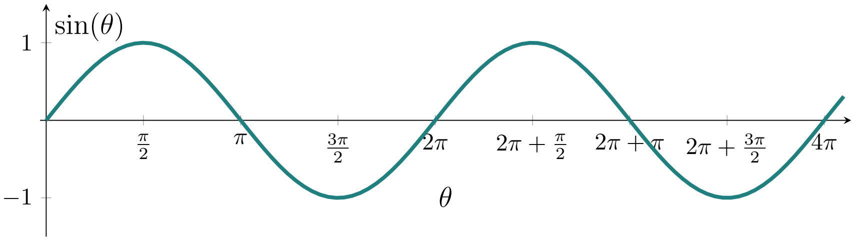


Funksjonen $\sin(\theta)$

Funksjonen $\sin(\theta)$:

- Svinger mellom 1 og -1 når θ varierer mellom 0 og 2π
- Svinger på samme måte når θ varierer mellom 2π og 4π, 4π og 6π osv

$\rightarrow$ Funksjonen er **periodisk**

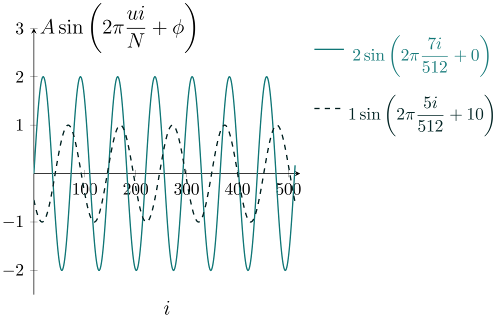


Diskret sinus/cosinus i 1D

$$y[i] = A \sin\left(2\pi \frac{ui}{N} + \phi\right)$$

N : Antall sampler
u : Antall hele perioder
ϕ : Horisontal forskyving, *fase*
A : Amplitude

Diskret sinus/cosinus i 1D

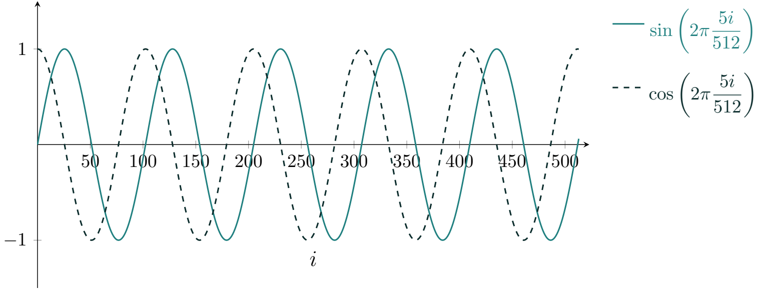


$$y[i] = A \sin\left(2\pi \frac{ui}{N} + \phi\right)$$

N :	Antall sampler
u :	Antall hele perioder
ϕ :	Horisontal forskyving, *fase*
A :	Amplitude

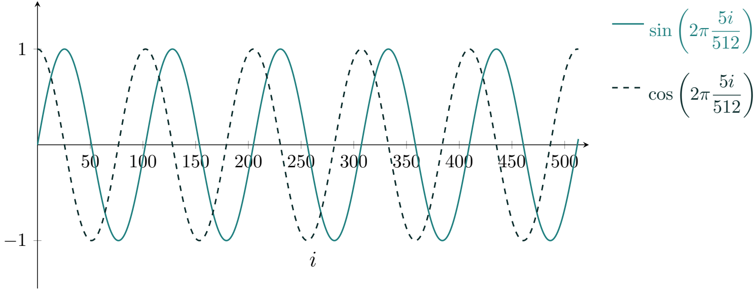
Hva skiller $\sin(\theta)$ fra $\cos(\theta)$?

- $\sin\left(2\pi\frac{ui}{N}\right)$: starter på 0
- $\cos\left(2\pi\frac{ui}{N}\right)$: starter på 1



Hva skiller $\sin(\theta)$ fra $\cos(\theta)$?

- $\sin\left(2\pi\frac{ui}{N}\right)$: starter på 0
- $\cos\left(2\pi\frac{ui}{N}\right)$: starter på 1



$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Bare startpunktet som er forskjellig!

Legge sammen $\sin$ og $\cos$

$$A_1 \sin(\theta) + A_2 \cos(\theta) = A \sin(\theta + \phi)$$

der $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ og $\phi = \operatorname{atan}(A_2, A_1)$

Legge sammen $\sin$ og $\cos$

$$A_1 \sin(\theta) + A_2 \cos(\theta) = A \sin(\theta + \phi)$$

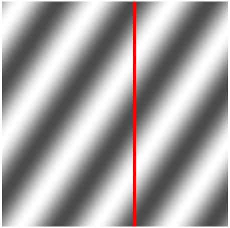
der $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ og $\phi = \mathrm{atan}(A_2, A_1)$

$\rightarrow$ Får en $\sin$-funksjon med samme frekvens, men endret amplitude og fase

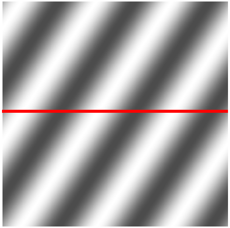
Kan med dette si at enhver sinus-funksjon med gitt frekvens kan dannes ved å legge sammen en vektet sinus-funksjon og vektet cosinus-funksjon med samme frekvens !

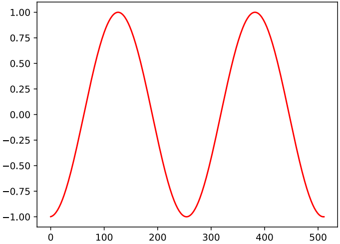
Sinus-funksjoner i 2D

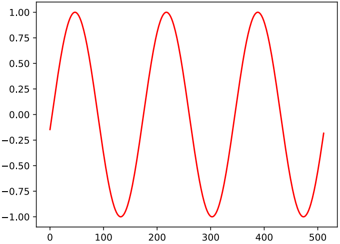
Vertikal "kutt"



Horisontal "kutt"







Diskret sinus/cosinus i 2D

$$f(x, y) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right) + \phi\right)$$

A : Amplitude

u : Vertikal frekvens

v : Horisontal frekvens

ϕ : Faseforskyving

Diskret sinus/cosinus i 2D

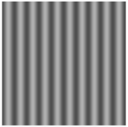
$$f(x, y) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right) + \phi\right)$$

A : Amplitude

u : Vertikal frekvens

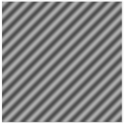
v : Horisontal frekvens

ϕ : Faseforskyving

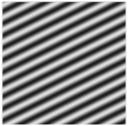


$A = 50,$
$u = 0,$
$v = 10$

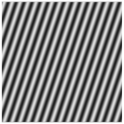
$A = 20,$
$u = 10,$
$v = 0$



$A = 50,$
$u = 10,$
$v = 10$

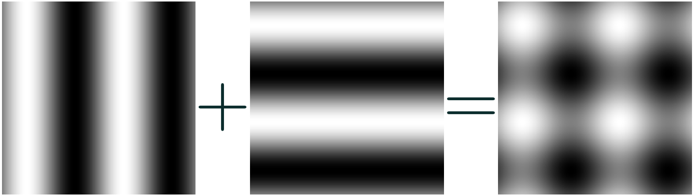


$A = 100,$
$u = 10,$
$v = 5$

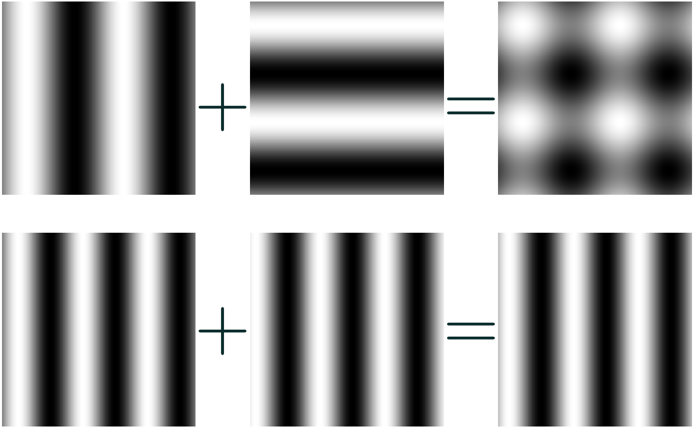


$A = 100,$
$u = 5,$
$v = 15$

Eksempel: Sum av 2D sinusfunksjoner



Eksempel: Sum av 2D sinusfunksjoner



Basisbilder: Matriser med èn 1-er og resten 0

Typisk represjontasjon av et gråtonebilde:

Vektet sum av matriser med kun ett element lik 1 og resten 0

Basisbilder: Matriser med èn 1-er og resten 0

Typisk represjontasjon av et gråtonebilde:

Vektet sum av matriser med kun ett element lik 1 og resten 0

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Eksempel på basisbilder for 4×4 bilder

Basisbilder: Matriser med èn 1-er og resten 0

Typisk represjontasjon av et gråtonebilde:

Vektet sum av matriser med kun ett element lik 1 og resten 0

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\longleftarrow\ \text{Eksempel på basisbilder for } 4\times 4 \text{ bilder}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Eksempel:
$$\begin{bmatrix}2&3&0&5\\1&5&4&0\\6&3&1&2\\5&1&0&7\end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \cdots + 7\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Alternativ basis: Fourier

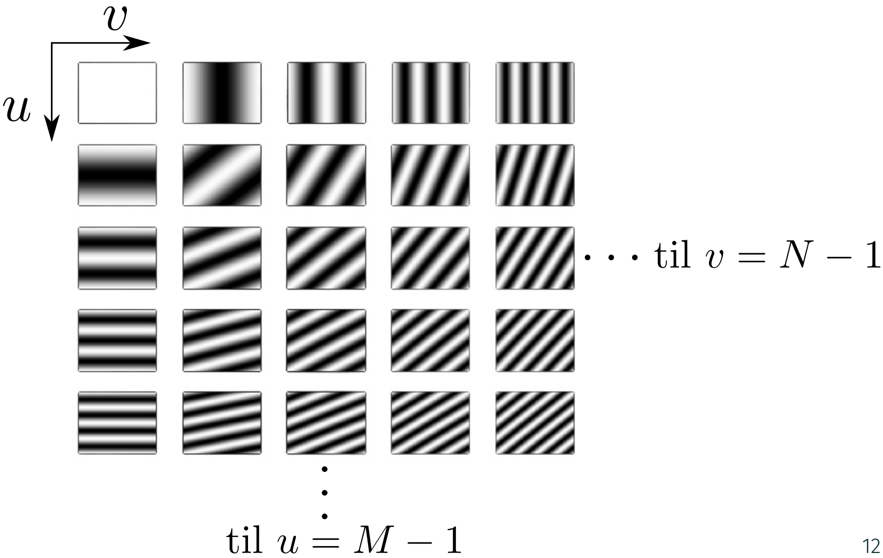
Digitale gråtonebilder av størrelse $M \times N$ kan representeres ved en vektet sum av disse $M \times N$ sinus- og cosinus-bildene:

$$\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) \qquad \sin\left(-2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

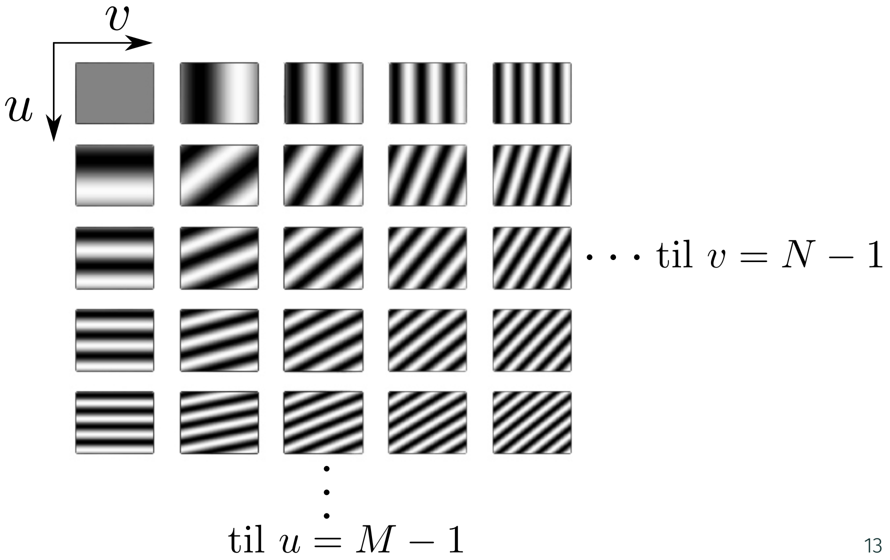
for frekvensene

$$u = 0, 1, \ldots, M-1$$
$$v = 0, 1, \ldots, N-1$$

Basisbilder: Cosinus



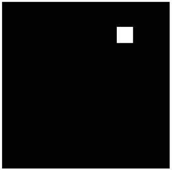
Basisbilder: Sinus



Finne bidraget fra et gitt basisbilde

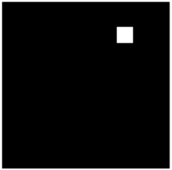
sum (

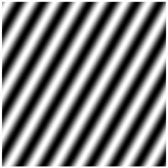
$\odot$



) $\approx$ pikselverdi til bakre del av bil

Finne bidraget fra et gitt basisbilde

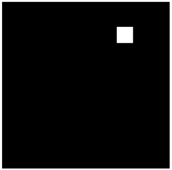
sum( $\odot$ ) $\approx$ pikselverdi til bakre del av bil

sum( $\odot$ )

Finne bidraget fra et gitt basisbilde

sum (

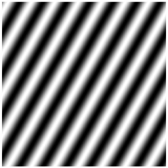
$\odot$



) $\approx$ pikselverdi til bakre del av bil

sum (

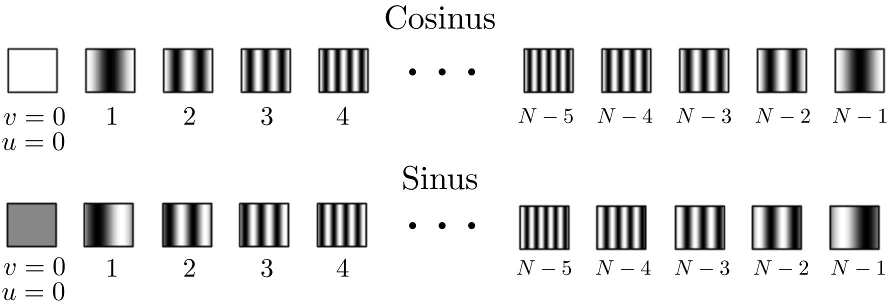
$\odot$



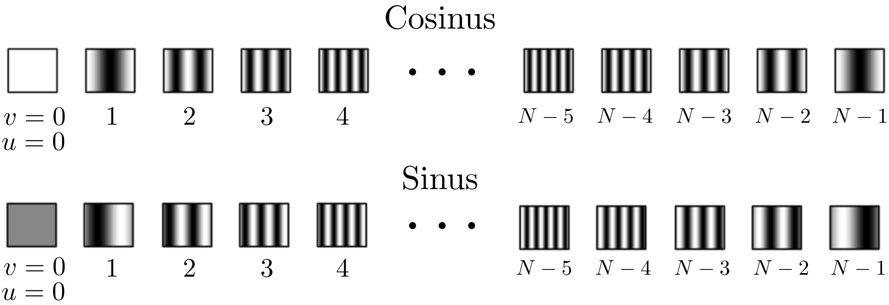
)

Vi finner bidragene ved å ta et indreprodukt mellom basisbildene og bildet

Symmetri i basisbildene



Symmetri i basisbildene



Antisymmetri i sinus

Finne fase og amplitude

- Lar $R(u, v)$ være cosinus-bidrag og $I(u, v)$ sinus-bidrag med frekvens u og v til et bilde
- Fasen finner vi ved

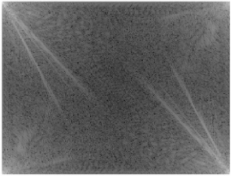
$$\phi(u, v) = \mathrm{atan}\left(\frac{I(u, v)}{R(u, v)}\right)$$

- … og amplitude ved

$$A(u, v) = \sqrt{R(u, v)^2 + I(u, v)^2}$$

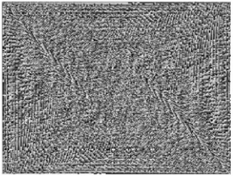
Eksempel: Amplitude og fase

Innbilde



Log av amplituden, **spekteret**

Forteller noe om hvilke frekvenser bildet inneholder



Fasen

Inneholder viktig informasjon!

Resultat som komplekst tall

- Representere resultatet ved komplekse tall

Resultat som komplekst tall

- Representere resultatet ved komplekse tall
- Cosinus-bidragene er i realdelen og sinus-bidragene er i imaginærdelen

Resultat som komplekst tall

- Representere resultatet ved komplekse tall
- Cosinus-bidragene er i realdelen og sinus-bidragene er i imaginærdelen
- Bildet i den nye basisen blir da

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v), \quad j = \sqrt{-1}$$

Resultat som komplekst tall

- Representere resultatet ved komplekse tall
- Cosinus-bidragene er i realdelen og sinus-bidragene er i imaginærdelen
- Bildet i den nye basisen blir da

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v), \quad j = \sqrt{-1}$$

- Amplitude: modulus (lengde i det komplekse planet)
- Fase: argument (vinkel i det komplekse planet)

2D diskret Fouriertransformasjon (DFT)

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

2D diskret Fouriertransformasjon (DFT)

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Eulers formel:

$$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

2D diskret Fouriertransformasjon (DFT)

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Eulers formel:

$$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Ved å bruke formelen, får vi sin- og cos-basisen vi så på tidligere:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \left(\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) + j\sin\left(-2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)\right)$$

2D diskret Fouriertransformasjon (DFT): Invers transformasjon

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Kan også gå tilbake fra Fourier-transformert bilde til opprinnelig representasjon:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \mathrm{e}^{2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Egenskaper ved 2D DFT

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

- $F(u,v)$ er periodisk:

$$F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$$

Egenskaper ved 2D DFT

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

- $F(u,v)$ er periodisk:

$$F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$$

- Må også anta at bildet er periodisk for at inverstransformasjon skal holde:

$$f(x,y) = f(x+M,y) = f(x,y+N) = f(x+M,y+N)$$

Egenskaper ved 2D DFT

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

- $F(u, v)$ er periodisk:

$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$$

- Må også anta at bildet er periodisk for at inverstransformasjon skal holde:

$$f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$$

- Hvis $f(x, y)$ er reell, er $|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$

Egenskaper ved 2D DFT

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

- $F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$

Egenskaper ved 2D DFT

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

- $F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$
- Shift-teoremet:

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u,v) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)}$$

Egenskaper ved 2D DFT

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

- $F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$
- Shift-teoremet:

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u,v) \mathrm{e}^{-2\pi j \left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)}$$

- 2D DFT er separabelt i to 1D DFT
  $\rightarrow$ Nødvendig, sammen med FFT-algoritmen, for å effektivt utføre transformasjonen av bilder av viss størrelse

Framvisning av amplitudespekteret

- Vanlig å forskyve spekteret slik at origo, $(u = 0, v = 0)$, ligger midt i bildet
- Går fint å gjøre dette siden $F(u, v)$ er periodisk

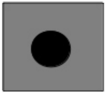
Framvisning av amplitudespekteret

- Vanlig å forskyve spekteret slik at origo, $(u = 0, v = 0)$, ligger midt i bildet
- Går fint å gjøre dette siden $F(u, v)$ er periodisk

Vi bytter kvadranter

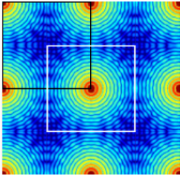
(pre-multipliserer innbildet med $(-1)^{x+y}$ for alle (x, y))

Innbilde



Bildedomenet

$|F(u, v)|$



Frekvens- eller Fourierdomenet
Spekteret til bildet

Framvisning av amplitudespekteret

- $|F(u, v)|$ kan ha høye verdier med stor avstand mellom verdiene!

Framvisning av amplitudespekteret

- $|F(u,v)|$ kan ha høye verdier med stor avstand mellom verdiene!
- Vanlig å ta en logaritmisk transformasjon

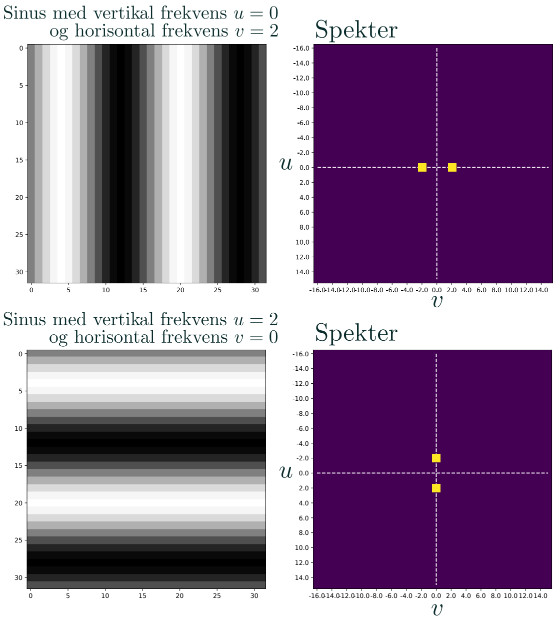
Framvisning av amplitudespekteret

- $|F(u, v)|$ kan ha høye verdier med stor avstand mellom verdiene!
- Vanlig å ta en logaritmisk transformasjon
  - $\rightarrow$ Vi er mer interessert i størrelsesforhold i amplitude mellom frekvenser

Framvisning av amplitudespekteret

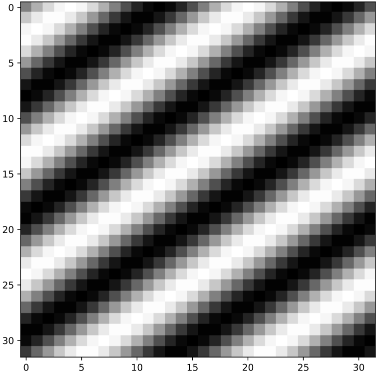
- $|F(u,v)|$ kan ha høye verdier med stor avstand mellom verdiene!
- Vanlig å ta en logaritmisk transformasjon
  - $\rightarrow$ Vi er mer interessert i størrelsesforhold i amplitude mellom frekvenser
  - $\rightarrow$ $g(u,v) = \log(|F(u,v)| + 1)$, som eventuelt skaleres til å ha gråtoner mellom 0 og 255

Eksempel: Fourier-transformasjon av sinus-bilder

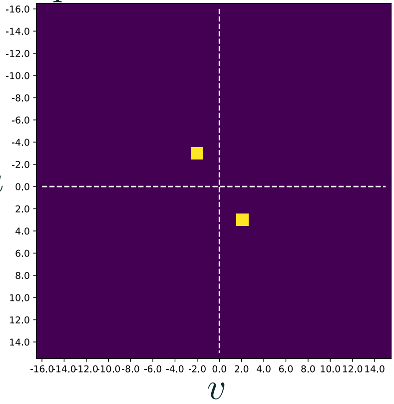


Eksempel: Fourier-transformasjon av skrå sinus-bilder

Sinus med vertikal frekvens $u = 3$
og horisontal frekvens $v = 2$



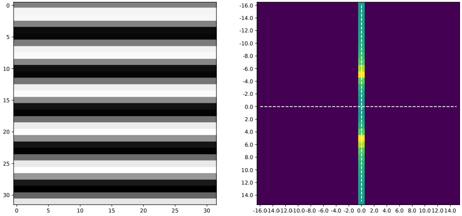
Spekter



Eksempel: Diskontinuitet

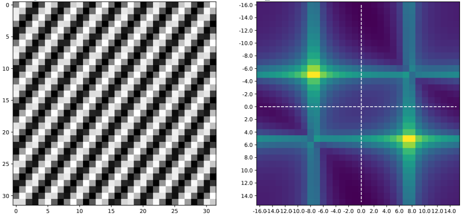
Sinus med vertikal frekvens $u = 5.3$
og horisontal frekvens $v = 0$

Spekter



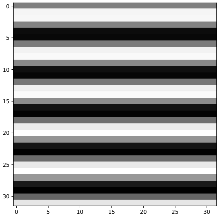
Sinus med vertikal frekvens $u = 5.3$
og horisontal frekvens $v = 7.5$

Spekter

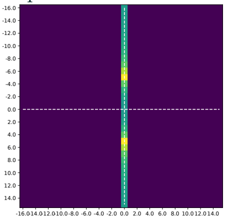


Eksempel: Diskontinuitet

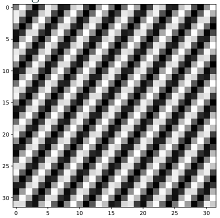
Sinus med vertikal frekvens $u = 5.3$ og horisontal frekvens $v = 0$



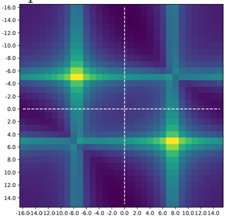
Spekter



Sinus med vertikal frekvens $u = 5.3$ og horisontal frekvens $v = 7.5$



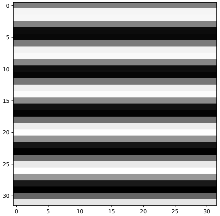
Spekter



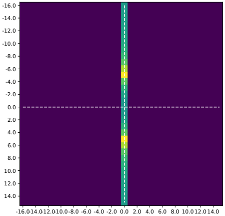
Husk: bildet antas å være periodisk!

Eksempel: Diskontinuitet

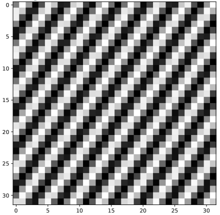
Sinus med vertikal frekvens $u = 5.3$ og horisontal frekvens $v = 0$



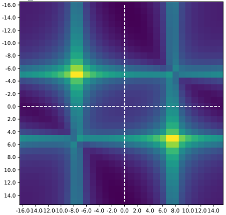
Spekter

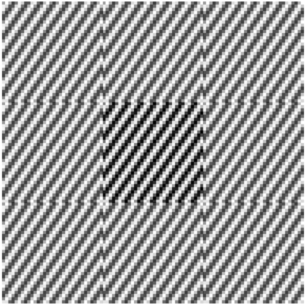


Sinus med vertikal frekvens $u = 5.3$ og horisontal frekvens $v = 7.5$



Spekter

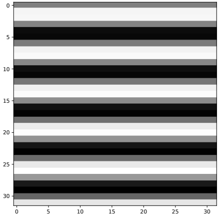




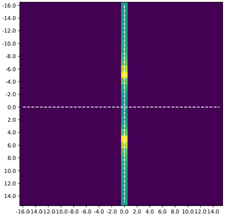
Husk: bildet antas å være periodisk!

Eksempel: Diskontinuitet

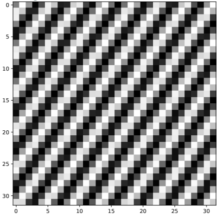
Sinus med vertikal frekvens $u = 5.3$
og horisontal frekvens $v = 0$



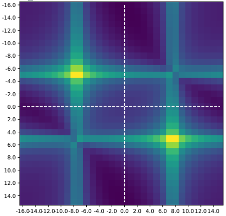
Spekter



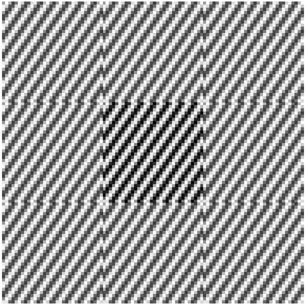
Sinus med vertikal frekvens $u = 5.3$
og horisontal frekvens $v = 7.5$



Spekter



Diskontiuiteter i bildene på grunn av implisitt periodisitet!



Husk: bildet antas å være periodisk!

Eksempel: Vanlige objektformer

Examples of the Fourier transform for other simple shapes are shown be

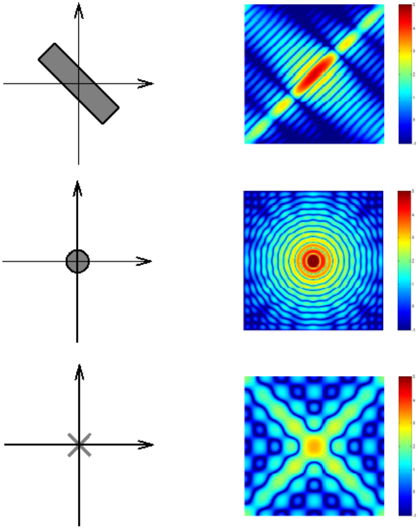
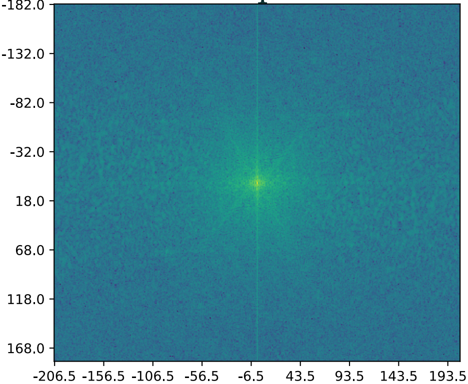


Figure 7-4: Fourier Transforms of Some Simple Shapes

Eksempel: Bilde

Innbilde

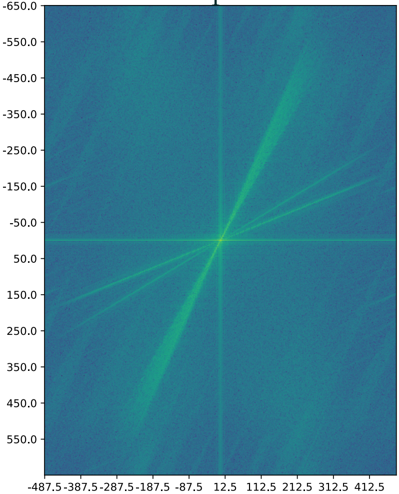
Innbildets spekter



Eksempel: Retningsdominert bilde

Innbilde

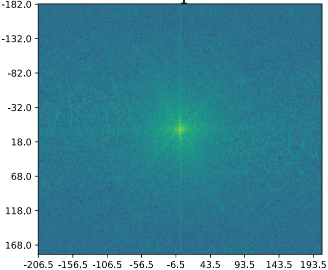
Innbildets spekter



Eksempel: Lav oppløsning og få detaljer

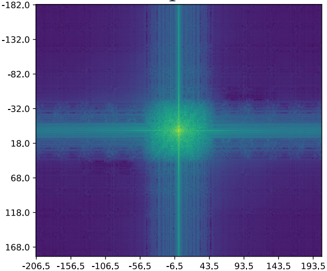
Innbilde

Innbildets spekter



Innbilde

Innbildets spekter



Noen observasjoner

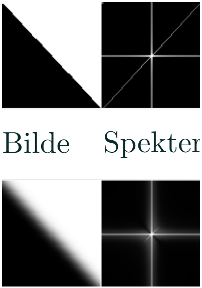
- Vanligvis størst bidrag i spekteret for lave verdier av u og v
- Bidrag langs $u-$ og $v-$aksen fordi bildet er implisitt periodisk og har derfor diskontinuitet langs kantene
- Linjestrukturer i en gitt retning i bildedomenet har linjestruktur normalt på retningen i Fourierdomenet

Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffsienter er ulik 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet

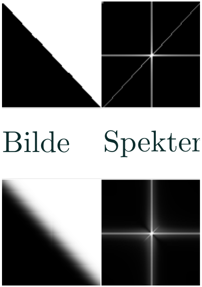
Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffsienter er ulik 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet



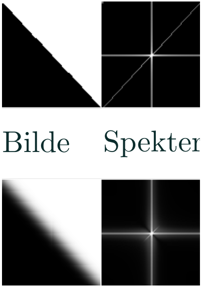
Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffsienter er ulik 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet
- Generelt,



Enda fler observasjoner

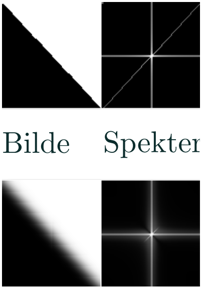
- Skarp kant
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffsienter er ulik 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet



- Generelt,
  - Smal struktur i bildedomenet: Bred struktur i Fourier-domenet

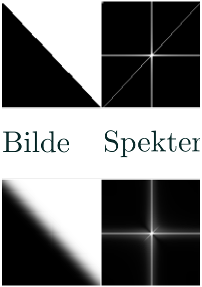
Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffsienter er ulik 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet
- Generelt,
  - Smal struktur i bildedomenet: Bred struktur i Fourier-domenet
  - Bred struktur i bildedomenet: Smal struktur i Fourier-domenet



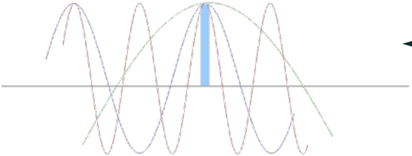
Enda fler observasjoner

- Skarp kant
    - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
    - Mange Fourierkoeffsienter er ulik 0
    - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
    - Færre sinusfunksjoner
    - Smalere bånd i Fourier-domenet

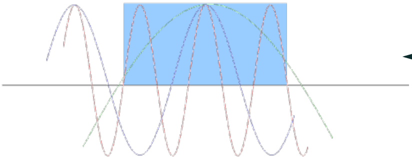


- Generelt,
    - Smal struktur i bildedomenet: Bred struktur i Fourier-domenet
    - Bred struktur i bildedomenet: Smal struktur i Fourier-domenet
    - Linjestruktur i retning θ i bildedomenet: Linjestruktur normalt på $(\theta + 90°)$ i Fourier-domenet

Intuisjon: form i bildedomenet og i frekvensdomenet



Høyt utslag på
alle tre frekvensene



Høyt utslag på
kun på laveste frekvens

Implementasjon av DFT

- Beregning av $F(u, v)$ for én (u, v): $\mathcal{O}(M \times N)$

Implementasjon av DFT

- Beregning av $F(u, v)$ for én (u, v): $\mathcal{O}(M \times N)$
- Beregning av $F(u, v)$ for hele bildet: $\mathcal{O}\Big((M \times N)^2\Big)$

Implementasjon av DFT

- Beregning av $F(u, v)$ for én (u, v): $\mathcal{O}(M \times N)$
- Beregning av $F(u, v)$ for hele bildet: $\mathcal{O}\Big((M \times N)^2\Big)$
- 2D Fast Fouriertransform (2D FFT):
  - Benytter at Fouriertranformasjonen er separabel i to 1D transformasjoner

Implementasjon av DFT

- Beregning av $F(u, v)$ for én (u, v): $\mathcal{O}(M \times N)$
- Beregning av $F(u, v)$ for hele bildet: $\mathcal{O}\Big((M \times N)^2\Big)$
- 2D Fast Fouriertransform (2D FFT):
  - Benytter at Fouriertranformasjonen er separabel i to 1D transformasjoner
  - Bruker hele bilder eller delbilder med størrelse 2^k, k heltall

Implementasjon av DFT

- Beregning av $F(u, v)$ for én (u, v): $\mathcal{O}(M \times N)$
- Beregning av $F(u, v)$ for hele bildet: $\mathcal{O}\Big((M \times N)^2\Big)$
- 2D Fast Fouriertransform (2D FFT):
  - Benytter at Fouriertranformasjonen er separabel i to 1D transformasjoner
  - Bruker hele bilder eller delbilder med størrelse 2^k, k heltall
  - Har orden $\mathcal{O}((M \times N) \times \log_2 (M \times N))$

Fourier-transformasjon

Beregn DFT og invers DFT:

$$F = \texttt{fft2}(f)$$

$$f = \texttt{ifft2}(F)$$

Fourier-transformasjon

Beregn DFT og invers DFT:

$F = \texttt{fft2}(f)$

$f = \texttt{ifft2}(F)$

Hent ut real- og imaginærdel:

$F_r = \texttt{real}(F)$

$F_i = \texttt{imag}(F)$

Fourier-transformasjon

Beregn DFT og invers DFT:

$F = \texttt{fft2}(f)$

$f = \texttt{ifft2}(F)$

Hent ut real- og imaginærdel:

$F_r = \texttt{real}(F)$

$F_i = \texttt{imag}(F)$

Hent ut spekter og fase:

$F_s = \texttt{abs}(F)$

$F_i = \texttt{angle}(F)$

Fourier-transformasjon

Beregn DFT og invers DFT:

$F = \texttt{fft2}(f)$
$f = \texttt{ifft2}(F)$

Hent ut real- og imaginærdel:

$F_r = \texttt{real}(F)$
$F_i = \texttt{imag}(F)$

Hent ut spekter og fase:

$F_s = \texttt{abs}(F)$
$F_i = \texttt{angle}(F)$

Vis fram spekter ved bruk av `fftshift` for å flytte på kvadranter:

$\texttt{imshow}(\texttt{fftshift}(\log(|F| + 1)))$

Oppsummering

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase

Oppsummering

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere $A \sin(\theta + \phi)$ i en $\sin$- og $\cos$-komponent

Oppsummering

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere $A\sin(\theta+\phi)$ i en $\sin$- og $\cos$-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med $\cos$- og $\sin$-basisbilder

Oppsummering

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere $A \sin(\theta + \phi)$ i en $\sin$- og $\cos$-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med $\cos$- og $\sin$-basisbilder
  - Representasjon ved komplekse tall $\rightarrow$ $\cos$- og $\sin$-ledd som hhv. reell- og imaginær-komponent

Oppsummering

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere $A \sin(\theta + \phi)$ i en $\sin$- og $\cos$-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med $\cos$- og $\sin$-basisbilder
  - Representasjon ved komplekse tall
    $\rightarrow$ $\cos$- og $\sin$-ledd som hhv. reell- og imaginær-komponent
  - Implsitt periodisitet i bildet
    $\rightarrow$ Utslag i diskontinuitet, “ekstra” frekvenser

Oppsummering

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere $A \sin(\theta + \phi)$ i en $\sin$- og $\cos$-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med $\cos$- og $\sin$-basisbilder
  - Representasjon ved komplekse tall
    $\rightarrow$ $\cos$- og $\sin$-ledd som hhv. reell- og imaginær-komponent
  - Implsitt periodisitet i bildet
    $\rightarrow$ Utslag i diskontinuitet, "ekstra" frekvenser
  - Fremvisning av spekteret $|F(u, v)|$

Oppsummering

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere $A\sin(\theta + \phi)$ i en $\sin$- og $\cos$-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med $\cos$- og $\sin$-basisbilder
  - Representasjon ved komplekse tall
    $\rightarrow$ $\cos$- og $\sin$-ledd som hhv. reell- og imaginær-komponent
  - Implsitt periodisitet i bildet
    $\rightarrow$ Utslag i diskontinuitet, "ekstra" frekvenser
  - Fremvisning av spekteret $|F(u, v)|$
  - Observasjoner