Løsningsforslag til ukeoppgaver i INF3110/4110

Uke 47 (19.-21.11.2003)

Oppgave 1

a) $(\lambda y.xy)[x/zw]$ gir $\lambda y.zwy$
Legg merke til at zwy betyr $(zw)y$.

b) $(\lambda x.yx)[x/zw]$ gir $\lambda x.yx$
Siden x er bundet; det er bare frie variable som skal substitueres.

c) $(\lambda y.yx)[x/zw]$ gir $\lambda y.y(zw)$
Her er parentesene nødvendige.

d) Den eneste frie forekomsten av x er innenfor skopet til z, og siden x skal substitueres med zx, må vi omdøpe bundne variable (α-konversjon) slik z ikke *blir* bundet ved substitueringen.

$(\lambda z.(\lambda x.yx)xz)[x/zx]$ gir ved å erstatte z med w
$(\lambda w.(\lambda x.yx)xw)[x/zx]$ gir ved substitusjon
$(\lambda w.(\lambda x.yx)(zx)w)$.

Oppgave 2

a) $(\lambda xy.x)wz$ gir w

b) $(\lambda xy.y)wz$ gir z

c) $(\lambda xy.x)(\lambda x.x)(\lambda x.xx)$ gir $\lambda x.x$

d) $(\lambda xy.y)(\lambda x.x)(\lambda x.xx)$ gir $\lambda x.xx$

e) $(\lambda xy.x)(\lambda x.x)$ gir $\lambda yx.x$

f) $(\lambda xyz.xz(yz))(\lambda xy.x)(\lambda xy.x)$ gir $\lambda x.x$

$$\begin{aligned}
& (\lambda xyz.xz(yz))(\lambda xy.x)(\lambda xy.x) \\
= \quad & (\lambda yz.(\lambda xy.x)z(yz))(\lambda xy.x) \\
= \quad & \lambda z.(\lambda xy.x)z((\lambda xy.x)z) \\
= \quad & \lambda z.(\lambda y.z)((\lambda xy.x)z) \\
= \quad & \lambda z.z \text{ (som ved } \alpha\text{-konversjon er lik } \lambda x.x)
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) La F være $\lambda xy.x(yx)y$

Oppgave 4 Church-numeraler

a) Enhver konstant på denne formen ville hatt typen `('a -> 'a) -> 'a -> 'a`. Hvis `'a` er `nat`, så er c_n en funksjon som tar (1) en funksjon fra `nat` til `nat` og (2), og som gir (3) en `nat` som verdi. (Tenk på suksessor og null.)

b) (Representasjon av pluss.) La $\mathbf{A}_+$ være termen $\lambda mnfx.mf(nfx)$.

For å se at dette virker, se på hvordan $\mathbf{A}_+ c_2 c_3$ gir c_5. Husk at c_2 er termen $\lambda fx.f(f(x))$ og c_3 er termen $\lambda fx.f(f(f(x)))$.

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{A}_+ c_2 c_3 \\ = & (\lambda mnfx.mf(nfx)) c_2 c_3 \\ = & (\lambda nfx.c_2 f(nfx)) c_3 \\ = & \lambda fx.c_2 f(c_3 fx) \end{array}$$

$c_3 fx$ gir (etter to β-reduksjoner) $f(f(f(x)))$.

$c_2 f(c_3 fx)$ gir dermed (etter ytterligere to β-reduksjoner) $f(f(f(f(f(x)))))$.

Dermed er $\lambda fx.c_2 f(c_3 fx)$ lik $\lambda fx.f(f(f(f(f(x)))))$, som er lik c_5.

c) (Representasjon av gange.) La $\mathbf{A}_*$ være termen $\lambda mnfx.m(nf)x$. (En enklere måte å skrive denne på er: $\lambda mnf.m(nf)$.)

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{A}_* c_2 c_3 \\ = & (\lambda mnfx.m(nf)x) c_2 c_3 \\ = & (\lambda nfx.c_2(nf)x) c_3 \\ = & (\lambda fx.c_2(c_3 f)x) \end{array}$$

$c_3 f$ gir (etter én β-reduksjon) $\lambda x.f(f(f(x)))$, dvs. en funksjon som appliserer f tre ganger på sitt argument.

$c_2(c_3 f)x$ gir dermed (etter to β-reduksjoner):

$\lambda x.f(f(f(x)))(\lambda x.f(f(f(x)))(x))$

…som igjen gir $f(f(f(f(f(f(x))))))$.

$(\lambda fx.c_2(c_3 f)x)$ er derfor lik c_6.