

INF4170 – Logikk

Forelesning 1: Utsagnslogikk

Arild Waaler

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

20. august 2013



Dagens plan

- 1 Utsagnslogikk
- 2 Sekventkalkyle
- 3 Sunnhet
- 4 Kompletthet

Utsagnslogikk

- 1 Utsagnslogikk
 - Introduksjon
 - Syntaks
 - Strukturell induksjon
 - Semantikk
- 2 Sekventkalkyle
- 3 Sunnhet
- 4 Kompletthet

Utsagnslogikk Introduksjon

- **Syntaks**: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- **Semantikk**: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- **Kalkyle**: syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne **bevisbare** uttrykk.
- **Sunnhet**: alle bevisbare uttrykk er tautologier — korrekthet av kalkylen.
- **Kompletthet**: alle tautologier er bevisbare — kalkylen sterk nok til å fange inn *alle* interessante uttrykk.

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av *utsagnsvariable* er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}$.

- Utsagnsvariable representerer *atomære utsagn*, f.eks.
 - “det regner”
 - “solen skinner”
 - “logikk er gøy”

Notasjon

Vi skriver ofte utsagnsvariable som P, Q, R, \dots

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

“hvis det regner, så blir det vått,”

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det *utsagnslogiske alfabet* består av:

- Utsagnsvariablene i \mathcal{V}_u .
- De *logiske konnektivene* $\wedge, \vee, \rightarrow$ og \neg .
- Hjelpesymbolene ‘(’ og ‘)’.

Intuisjon: \neg skal bety “ikke” \wedge skal bety “og”
 \vee skal bety “eller” \rightarrow skal bety “impliserer”

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariable er en *atomær formel*.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av *utsagnslogiske formler* er den minste mengden \mathcal{F}_u slik at:

- 1 \mathcal{F}_u inneholder alle atomære formler.
- 2 Hvis $A \in \mathcal{F}_u$, så er $\neg A \in \mathcal{F}_u$.
- 3 Hvis $A, B \in \mathcal{F}_u$, så er $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ med i \mathcal{F}_u .

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

$(P \rightarrow Q)$ skrives $P \rightarrow Q$
 $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$ skrives $(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R)$

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \wedge P)$

Oppgave

Vis at $((Q \wedge P)$ ikke er en utsagnslogisk formel.

- Intuitivt, men
- hvordan **bevise** det?
- Ved **strukturell induksjon** kan vi vise noe **sterkere**:

Påstand

Alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.

Strukturell induksjon

- Mengden \mathcal{F}_U av utsagnslogiske formler er definert **induktivt**.
- Ved **strukturell induksjon** kan man vise at en egenskap holder for **alle** formler i \mathcal{F}_U .

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i \mathcal{F}_U har egenskapen **Q** hvis:

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **Q**.

Induksjonssteg:

- Hvis A har egenskapen **Q**, så har også $\neg A$ egenskapen **Q**.
- Hvis A og B har egenskapen **Q**, så har også $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ egenskapen **Q**.

- Strukturell induksjon er en bevisteknikk vi kommer til å bruke **mye!**
- Derfor er det viktig å kunne den godt...

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_U$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B . A har like mange parenteser som B . Dermed holder påstanden også for A .
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C . A har én venstre- og én høyreparentes i tillegg til de som finnes i B og C . Siden påstanden holder for B og C , holder den også for A .

□

Tilbake til uttrykket $((Q \wedge P)$:

Påstand

$((Q \wedge P)$ er ikke en utsagnslogisk formel.

Bevis.

- 1 Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
- 2 Det **kontrapositive** er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.
- 3 Uttrykket $((Q \wedge P)$ har to venstre- og én høyreparentes, altså ulikt antall.
- 4 Derfor er det **ikke** en utsagnslogisk formel.

□

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten **sanne** eller **usanne**.

Definisjon

La **Bool** = {**1**, **0**}.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- Vi definerer en unær operator $\hat{\neg}$ på **Bool** slik at $\hat{\neg}1 = 0$ og $\hat{\neg}0 = 1$.
- Vi definerer de binære operatorene $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ og $\hat{\rightarrow}$ på **Bool** som følger:

x	y	$x\hat{\wedge}y$	$x\hat{\vee}y$	$x\hat{\rightarrow}y$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabellen over kalles en **sannhetsverditabell**.

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En **boolsk valuasjon** er en funksjon v fra \mathcal{F}_U til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \hat{\neg}v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A)\hat{\wedge}v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A)\hat{\vee}v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A)\hat{\rightarrow}v(B)$

Merk

- Symbolene \neg , \wedge , \vee og \rightarrow på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av syntaksen.
- Symbolene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$ på høyresiden er operatører på **Bool**, og en del av semantikken.

Eksempel

- Se på formelen $\neg P \rightarrow Q$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = 1$ og $v(Q) = 0$.
- Vi får:

$$\begin{aligned}
 v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \hat{\rightarrow} v(Q) \\
 &= (\hat{\neg} v(P)) \hat{\rightarrow} v(Q) \\
 &= (\hat{\neg} 1) \hat{\rightarrow} v(Q) \\
 &= (\hat{\neg} 1) \hat{\rightarrow} 0 \\
 &= 0 \hat{\rightarrow} 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Definisjon (Oppfylldbar)

- En boolsk valuasjon v **oppfyller** en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = 1$. Skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er **oppfylldbar** hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Formelen $P \rightarrow Q$ er oppfylldbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = 0$ eller $v(Q) = 1$.
- Formelen $\neg(P \rightarrow P)$ er ikke oppfylldbar. Hvorfor?

Definisjon (Falsifiserbar)

- En boolsk valuasjon v **falsifiserer** en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = 0$. Skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er **falsifiserbar** hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel

- Formelen $P \rightarrow Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = 1$ og $v(Q) = 0$.
- Formelen $P \rightarrow P$ er ikke falsifiserbar. Hvorfor?

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en **tautologi** hvis $v \models A$ for alle boolske valuasjoner v .

Eksempel

- Er P en tautologi?
- Hva med $\neg(P \rightarrow P)$?
- Og $P \rightarrow P$?

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en **motsigelse** hvis $v \not\models A$ for alle boolske valuasjoner v .

Merk

- Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er den oppfylldbar formel.
- En tautologi er **ikke** det motsatte av en motsigelse!

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A ikke er falsifiserbar.

Bevis.

formelen A er en tautologi
 \Leftrightarrow
 $v \models A$ for alle valuasjoner v
 \Leftrightarrow
 det finnes ingen valuasjon v slik at $v \not\models A$
 \Leftrightarrow
 A er ikke falsifiserbar

□

Hvis og bare hvis – \Leftrightarrow

Merk

- Begrepet “hvis og bare hvis” uttrykker *toveis implikasjon*.
- Skrives ofte \Leftrightarrow .
- P “hvis og bare hvis” Q kan uttrykkes i utsagnslogikk som

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

1 Utsagnslogikk

2 Sekventkalkyle

- Motivasjon
- Sekventer og aksiomer
- Sekventkalkylereglene
- Slutninger
- Utledninger
- Bevis
- Semantikk for sekventer
- Oppsummering

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en **tautologi**?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\frac{\frac{\frac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
 - Oppfylle: $\neg Q, P$. Falsifisere: P .
 - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P !
- Høyre løvnode:
 - Oppfylle: Q . Falsifisere: $Q, \neg P$.
 - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q !
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen ' $\dots \vdash \dots$ '. Slike objekter kaller vi for **sekventer**.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av **regler**.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnode. Et slikt objekt kalles en **utledning**.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sider av ' \vdash '. En utledning med denne egenskapen kalles et **bevis**.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for ' \vdash ' kalles **antecedent**.
- Formlene som står til høyre for ' \vdash ' kalles **succedent**.

Notasjon

I sekventer leses ' $,$ ' som union:

- Γ, A skal bety $\Gamma \cup \{A\}$.

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$
- $P, \perp, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow 2$

Definisjon (Aksiom)

Et **aksiom** er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær utsagnslogisk formel.

Hvilke av sekventene i eksempelet over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α -regler)

α -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} R\vee$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \quad B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} R\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} L\neg \quad \frac{\Gamma, A \vdash \quad \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$$

α -reglene kalles ofte **ett-premissregler**.

Definisjon (β -regler)

β -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} L\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

β -reglene kalles ofte **to-premissregler**.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α - og β -reglene.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} L\vee$$

- Sekventene **over** streken kalles **premiss**.
- Sekventen **under** streken kalles **konklusjon**.
- Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles **hovedformel**.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles **aktive formler**.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles **ekstraformler**.

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En **slutning** er en instans av en regel hvor
 - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler
 - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles **θ -slutninger**.

Eksempel

En regel $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$ definerer uendelig mange $R\neg$ -slutninger:

$$\frac{P \vdash \quad}{\vdash \neg P} \quad \frac{Q, P \vdash \quad}{Q \vdash \neg P} \quad \frac{Q \rightarrow R, P \vdash P}{Q \rightarrow R \vdash \neg P, P} \quad \dots$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \quad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q} \text{ LV}$$

- Sekventene **over** streken kalles **premisser**.
- Sekventen **under** streken kalles **konklusjon**.
- Formelen $P \vee R$ i konklusjonen er **hovedformel**.
- Formlene P og R i premissene er **aktive formler**.
- De andre formlene er **ekstraformler**.

Utleddinger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodeene er øverst.
- Rotnoden kalles **rotsekvent**.
- Løvnodeene kalles **løvsekventer**.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

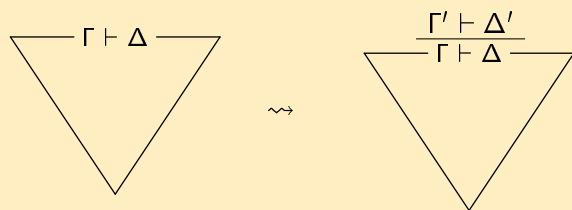
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

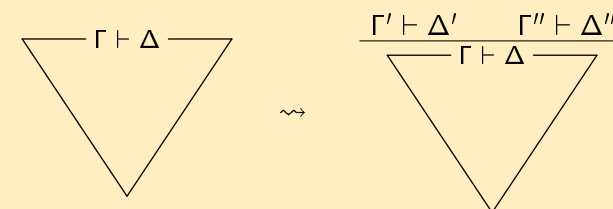
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α -utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α -slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β -utvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β -slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



β -utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK-utledninger)

$$\begin{array}{c} \vdash R \vee Q \quad P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P \\ \\ \frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} R \rightarrow \quad \frac{\vdash P \quad \vdash P}{\vdash P \wedge P} R \wedge \\ \\ \frac{\frac{P \vdash P \quad P \vdash Q}{P \vdash P \wedge Q} R \wedge \quad \frac{Q \vdash P \quad Q \vdash Q}{Q \vdash P \wedge Q} R \wedge}{P \vee Q \vdash P \wedge Q} LV \end{array}$$

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekvantene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel (LK-bevis)

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{P \vdash P}{\vdash P \rightarrow P} R \rightarrow \\ \\ \frac{\frac{\times}{\neg Q, P \vdash P} R \neg \quad \frac{\times}{Q \vdash Q, \neg P} L \neg}{\neg Q \vdash \neg P, P} R \neg \quad \frac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} R \rightarrow}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} R \rightarrow \quad \frac{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} L \rightarrow}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} L \rightarrow \end{array}$$

- Sekventene $\vdash P \rightarrow P$ og $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ er bevisbare, siden det finnes LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet 'x' er **ikke** en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **gyldig** hvis alle *valuasjoner* som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ .

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en **motmodell** til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- Vi sier at en motmodell til en sekvent **falsifiserer** sekventen.
- En sekvent er **falsifiserbar** hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = 1, v(Q) = 0$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = 0, v(Q) = 1$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = 0$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = 1$
- \vdash Motmodell: **alle modeller!**

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{\begin{array}{c} \times \\ P \vdash P \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ Q \vdash Q \end{array}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\frac{\frac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \quad \frac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q}$$

1 Utsagnslogikk

2 Sekventkalkyle

3 Sunnhet

- Introduksjon
- Bevaring av falsifiserbarhet
- Eksistens av falsifiserbar løvsekvent
- Alle aksiomer er gyldige
- Bevis for sunnhetsteoremet

4 Kompletthet

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK **ukorrekt** eller **usunn** ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er **sunn** hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem

Sekventkalkylen LK er sunn.

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en **korrekt** kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

- ① Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- ② En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
- ③ Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Definisjon

En LK-regel θ er *falsifiserbarhetsbevarende* (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ -slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. $L\rightarrow$ -regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- I delbeviset for $L\rightarrow$ må vi vise at alle $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen $L\rightarrow$ generaliserer alle $L\rightarrow$ -slutninger.
- Vi lar Γ , Δ , A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevis for $R\neg$.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Pr. definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Da falsifiserer v premisset. □

Bevis for $L \rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L \rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi pr. definisjon av v at
 - (1) $v \not\models A$, eller
 - (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss.

□

Bevis for “for alle”-påstander

- Se på påstanden “for alle $x \in S: P(x)$ ”.
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan **generalisere fra et vilkårlig element**:
 - Velg et **vilkårlig** element $a \in S$.
 - Vis at $P(a)$ holder.
 - Siden a var tilfeldig valgt må påstanden i første linje holde.

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning δ , så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ .

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ .

Basissteg: δ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i δ , nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

□

Bevis (induksjonssteg – α -utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} \alpha$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ , og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen **før** α -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **ikke** er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ . Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **er** $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α -reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

Bevis (induksjonssteg – β -utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}}{\beta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ , og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen **før** β -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **ikke** er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ . Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen **er** $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β -reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.

□

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i π .
- Da har π en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke π et LK-bevis.

□

1 Utsagnslogikk

2 Sekventkalkyle

3 Sunnhet

4 Kompletthet

- Introduksjon
- Kompletthetsteoremet
- Bevis for kompletthetsteoremet

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
 - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
 - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

G^\top være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G , og

G^\perp være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G , og

v være valuasjonen som gjør alle alle atomære formler i G^\top sanne og alle andre atomære formler (spesielt de i G^\perp) usanne.

Eksempel

$$\frac{\frac{\frac{P \vdash Q, P}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \quad \frac{Q, P \vdash Q}{P \rightarrow Q, R \vdash Q}}{\frac{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}} \quad \frac{R \vdash Q, P}{P \rightarrow Q, R \vdash Q} \quad \frac{Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$G^\top = \{R, P \rightarrow Q, P \vee R\}$$

$$G^\perp = \{Q, P, (P \vee R) \rightarrow Q\}$$

v = valuasjonen definert ved $v(R) = 1$ og $v(Q) = v(P) = 0$

Denne valuasjonen falsifiserer rotsekventen.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i G^\top sanne og alle formler i G^\perp usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:
 - Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.
 - Hvis $A \in G^\perp$, så $v(A) = 0$.

Basissteg: A er en atomær formel i G^\top/G^\perp .

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte G^\top/G^\perp .

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstanden holder for A og B , så må vi vise at den holder for $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$. Dette gir fire forskjellige tilfeller. (Vi viser tre av dem her.)

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^\perp$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \wedge B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 1$.

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 0$.