INF4170 – Logikk

Forelesning 1: Utsagnslogikk

Arild Waaler

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

20. august 2013

Dagens plan

1. Utsagnslogikk
2. Sekventkalkyle
3. Sunnhet
4. Kompletthet

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle: syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.
- Sunnhet: alle bevisbare uttrykk er tautologier — korrekthet av kalkylen.
- Kompletthet: alle tautologier er bevisbare — kalkylen sterk nok til å fange inn *alle* interessante uttrykk.

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.
  - *"det regner"*
  - *"solen skinner"*
  - *"logikk er gøy"*

Notasjon

Vi skriver ofte utsagnsvariable som $P, Q, R, \ldots$

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis det regner, så blir det vått,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det utsagnslogiske alfabet består av:

- *Utsagnsvariablene i $\mathcal{V}_u$.*
- *De logiske konnektivene $\land$, $\lor$, $\rightarrow$ og $\neg$.*
- *Hjelpesymbolene '(' og ')'.*

Intuisjon:

Intuisjon:	$\neg$ skal bety *"ikke"*	$\land$ skal bety *"og"*
	$\lor$ skal bety *"eller"*	$\rightarrow$ skal bety *"impliserer"*

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathcal{F}_u$ slik at:

1. $\mathcal{F}_u$ *inneholder alle atomære formler.*
2. *Hvis* $A \in \mathcal{F}_u$, *så er* $\neg A \in \mathcal{F}_u$.
3. *Hvis* $A, B \in \mathcal{F}_u$, *så er* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ *og* $(A \rightarrow B)$ *med i* $\mathcal{F}_u$.

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

$$\begin{array}{lll} (P \rightarrow Q) & \textit{skrives} & P \rightarrow Q \\ ((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R)) & \textit{skrives} & (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R) \end{array}$$

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Vis at $((Q \land P)$ *ikke er en utsagnslogisk formel.*

- Intuitivt, men
- hvordan bevise det?
- Ved strukturell induksjon kan vi vise noe sterkere:

Påstand

Alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_u$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_u$ har egenskapen **Q** *hvis:*

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **Q**.

Induksjonssteg:

- *Hvis A har egenskapen* **Q**, *så har også $\neg A$ egenskapen* **Q**.
- *Hvis A og B har egenskapen* **Q**, *så har også $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ egenskapen* **Q**.

- Strukturell induksjon er en bevisteknikk vi kommer til å bruke mye!
- Derfor er det viktig å kunne den godt...

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C. A har én venstre- og én høyreparentes i tillegg til de som finnes i B og C. Siden påstanden holder for B og C, holder den også for A.

$\square$

Tilbake til uttrykket $((Q \wedge P)$:

Påstand

$((Q \wedge P)$ *er ikke en utsagnslogisk formel.*

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
2. Det kontrapositive er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.
3. Uttrykket '$((Q \wedge P)$' har to venstre- og én høyreparentes, altså ulikt antall.
4. Derfor er det ikke en utsagnslogisk formel.

□

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten sanne eller usanne.

Definisjon

La $\mathbf{Bool} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- *Vi definerer en unær operator* $\hat{\neg}$ *på* **Bool** *slik at* $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ *og* $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- *Vi definerer de binære operatorene* $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ *og* $\hat{\rightarrow}$ *på* **Bool** *som følger:*

x	y	$x \hat{\wedge} y$	$x \hat{\vee} y$	$x \hat{\rightarrow} y$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabellen over kalles en sannhetsverditabell.

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_u$ til **Bool** *slik at:*

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \hat{\rightarrow} v(B)$

Merk

- *Symbolene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$ på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av syntaksen.*
- *Symbolene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$ på høyresiden er operatorer på* **Bool**, *og en del av semantikken.*

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \to Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$
\begin{aligned}
v(\neg P \to Q) &= v(\neg P) \mathbin{\hat{\to}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathbin{\hat{\to}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathbin{\hat{\to}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathbin{\hat{\to}} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{0} \mathbin{\hat{\to}} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Definisjon (Oppfyllbar)

- *En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.*
- *En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.*

Eksempel

- *Formelen $P \to Q$ er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.*
- *Formelen $\neg(P \to P)$ er ikke oppfyllbar. Hvorfor?*

Definisjon (Falsifiserbar)

- *En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.*
- *En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.*

Eksempel

- *Formelen $P \to Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.*
- *Formelen $P \to P$ er ikke falsifiserbar. Hvorfor?*

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for alle boolske valuasjoner v.

Eksempel

- *Er P en tautologi?*
- *Hva med $\neg(P \to P)$?*
- *Og $P \to P$?*

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse hvis $v \not\models A$ for alle boolske valuasjoner v.

Merk

- *Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.*
- *Det motsatte av en motsigelse er den oppfyllbar formel.*
- *En tautologi er ikke det motsatte av en motsigelse!*

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A ikke er falsifiserbar.

Bevis.

$$\text{formelen } A \text{ er en tautologi}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$v \models A \text{ for alle valuasjoner } v$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{det finnes ingen valuasjon } v \text{ slik at } v \not\models A$$
$$\Leftrightarrow$$
$$A \text{ er ikke falsifiserbar}$$

$\square$

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

- *Begrepet "hvis og bare hvis" uttrykker toveis implikasjon.*
- *Skrives ofte* $\Leftrightarrow$.
- P *"hvis og bare hvis"* Q *kan uttrykkes i utsagnslogikk som*

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P.   Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q.   Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen '$\ldots \vdash \ldots$'. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av '$\vdash$'. En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for '$\vdash$' kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for '$\vdash$' kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses ',' som union:

- Γ, A *skal bety* $\Gamma \cup \{A\}$.

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$
- $P, 1, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow 2$

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær utsagnslogisk formel.

Hvilke av sekventene i eksempelet over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \mathrm{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \mathrm{R}\!\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathrm{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte ett-premissregler.

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathrm{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\to$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK *er α- og β-reglene.*

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*
  - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*
  - *Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler*
- *Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.*

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathrm{R}\neg$ *definerer uendelig mange* R¬*-slutninger:*

$$\frac{P \vdash}{\vdash \neg P} \qquad \frac{Q, P \vdash}{Q \vdash \neg P} \qquad \frac{Q \to R, P \vdash P}{Q \to R \vdash \neg P, P} \qquad \ldots$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathrm{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.
- De andre formlene er ekstraformler.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

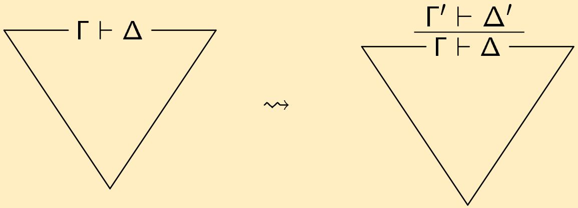
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

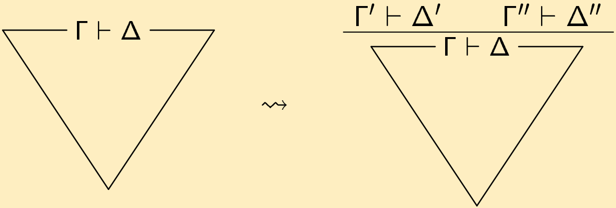
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en* α*-slutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premiss* $\Gamma' \vdash \Delta'$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK*-utledning.*



Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-*utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en* β*-slutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premisser* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK-*utledning*.



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\frac{P \vdash Q}{\vdash {\color{red}P \to Q}}\,\mathrm{R}{\to} \qquad \frac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash {\color{red}P \land P}}\,\mathrm{R}{\land}$$

$$\frac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash {\color{red}P \land Q}}\,\mathrm{R}{\land} \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash {\color{red}P \land Q}}\,\mathrm{R}{\land}}{{\color{red}P \lor Q} \vdash P \land Q}\,\mathrm{L}{\lor}$$

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-*bevis er en* LK-*utledning der alle løvsekventene er aksiomer.*

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *er* LK-*bevisbar hvis det finnes et* LK-*bevis med* $\Gamma \vdash \Delta$ *som rotsekvent.*

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathrm{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \mathrm{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{L}{\to}$$

- *Sekventene* $\vdash P \to P$ *og* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ *er bevisbare, siden det finnes* LK-*bevis med disse sekventene som rotsekvent.*

Merk: symbolet '$\times$' er ikke en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ — *Motmodell: som over eller* $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$ — *Motmodell: alle modeller!*

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \qquad \dfrac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \to Q \vdash \neg Q}$$

1. Utsagnslogikk

2. Sekventkalkyle

3. Sunnhet
   - Introduksjon
   - Bevaring av falsifiserbarhet
   - Eksistens av falsifiserbar løvsekvent
   - Alle aksiomer er gyldige
   - Bevis for sunnhetsteoremet

4. Kompletthet

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn . . .

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK-*bevisbar sekvent er gyldig.*

Teorem

Sekventkalkylen LK *er sunn.*

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en korrekt kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Definisjon

En LK*-regel θ er* *falsifiserbarhetsbevarende* *(oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ-slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.*

Lemma

Alle LK*-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.*

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L$\rightarrow$-regelen:

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\!\rightarrow$$

- I delbeviset for L$\rightarrow$ må vi vise at alle L$\rightarrow$-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen L$\rightarrow$ generaliserer alle L$\rightarrow$-slutninger.
- Vi lar Γ, Δ, A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle L$\rightarrow$-slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\ \mathrm{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Pr. definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Da falsifiserer v premisset.

$\square$

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta} \, \mathrm{L}\!\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi pr. definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss.

$\square$

Bevis for "for alle"-påstander

- Se på påstanden "for alle $x \in S$: $P(x)$".
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan generalisere fra et vilkårlig element:
  - Velg et vilkårlig element $a \in S$.
  - Vis at $P(a)$ holder.
  - Siden a var tilfeldig valgt må påstanden i første linje holde.

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning δ, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ.

Basissteg: δ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

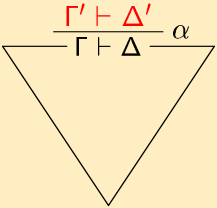
$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i δ, nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

□

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen



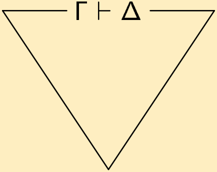
- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α-reglene bevarer falsifiserbarhet.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\ \beta$$



- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β-reglene bevarer falsifiserbarhet.

$\square$

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.

$\square$

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i π.
- Da har π en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke π et LK-bevis.

$\square$

Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er* *sunn* *hvis enhver* LK-*bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er* *komplett* *hvis enhver gyldig sekvent er* LK-*bevisbar.*

sunnhet

Gyldighet
(semantisk)
Universell påstand:
"for alle valuasjoner..."

kompletthet

Bevisbarhet
(syntaktisk)
Eksistensiell påstand:
"det fins et bevis..."

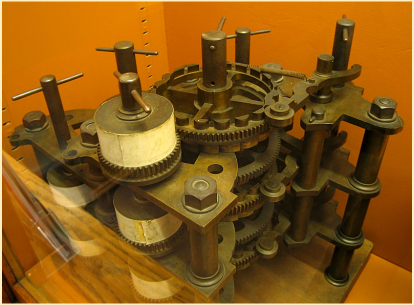
Introduksjon

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar

En LK-maskin?



Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ...
- Vi ønsker begge deler
  - Hverken for mye eller for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...

Kompletthetsteoremet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Eksistens av valuasjon)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar*

Dvs. det finnes en valuasjon som gjør samtlige formler i Γ sanne og samtlige formler i Δ usanne.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

  $G^\top$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G, og

  $G^\perp$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

  v være valuasjonen som gjør alle alle atomære formler i $G^\top$ sanne og alle andre atomære formler (spesielt de i $G^\perp$) usanne.

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \vee R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \vee R) \to Q}
$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$
\begin{aligned}
G^{\top} &= \{R, P \to Q, P \vee R\} \\
G^{\perp} &= \{Q, P, (P \vee R) \to Q\} \\
v &= \text{valuasjonen definert ved } v(R) = 1 \text{ og } v(Q) = v(P) = 0 \\
&\ \text{Denne valuasjonen falsifiserer rotsekventen.}
\end{aligned}
$$

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^\perp$, så $v(A) = 0$.

Basissteg: A er en atomær formel i $G^\top / G^\perp$.

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte $G^\top / G^\perp$.

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstanden holder for A og B, så må vi vise at den holder for $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$. Dette gir fire forskjellige tilfeller. (Vi viser tre av dem her.)

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \to B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 1$.

Anta at $(A \to B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 0$.