INF4170 – Logikk

Forelesning 2: Førsteordens logikk

Arild Waaler

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

10. september 2013

Dagens plan

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
- Førsteordens logikk er ikke avgjørbart.

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."
- "Hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c, så er a mindre enn c."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."
- "Det fins to sheriffer i byen."

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Sunnhet: alle bevisbare sekventer er gyldige.

Kompletthet: alle gyldige sekventer er bevisbare.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene $\land$, $\lor$, $\to$ og $\neg$.*
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*
- *Kvantorene $\exists$ (det fins) og $\forall$ (for alle).*
- *En tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}$ av variable $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (vi skriver x, y, z, ..., for variable).*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av relasjonssymboler* $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt ariteten til symbolet.

Syntaks

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

- *De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.*
- *En signatur angis ved et tuppel* $\langle c_1, c_2, c_3, \ldots ; f_1, f_2, f_3, \ldots ; R_1, R_2, R_3, \ldots \rangle$*, hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.*

Syntaks

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ *av første-ordens termer er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

- *Enhver variabel og konstant er en term.*
- *Hvis* f *er et funksjonssymbol med aritet* n *og* $t_1, \ldots, t_n$ *er termer, så er* $f(t_1, ..., t_n)$ *en term.*

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, ..., $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, ...
- $g(a, a)$, $g(a, x)$, $g(a, y)$, $g(x, x)$, $g(x, y)$, $g(y, y)$, ...
- $f(f(a))$, $f(f(x))$, $f(f(y))$, ...

Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive fa, fx, fy, gaa, gax, ...

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $= (x, x), ++, +0, \ldots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.
- Vi bruker også infiks notasjon og skriver: $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \ldots$.

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $\in$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \mathrm{Ola}, \mathrm{Kari}; \mathrm{mor}, \mathrm{far}; \mathrm{Mor}, \mathrm{Far}, \mathrm{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.
- mor(Ola), mor(Kari), far(Ola) og far(Kari) er termer.
- mor(x) og far(x) er termer.
- mor(mor(x)) og mor(far(Kari)) er termer.

Syntaks

Definisjon (Atomær formel - førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- *Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.*
- *Så lenge det er entydig og ariteten er kjent skriver vi Rx, Rfa, $Rafa$, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ formler.*
3. *Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ formler.*

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\mathrm{Idol}(x), \mathrm{Idol}(a), \mathrm{Liker}(a, a), \mathrm{Liker}(a, b)$
- $\exists x \mathrm{Idol}(x)$ - "det fins et Idol"
- $\forall x \exists y \mathrm{Liker}(x, y)$ - "alle liker noen"
- $\forall x \mathrm{Liker}(x, a)$ - "alle liker a"
- $\neg\exists x \mathrm{Liker}(x, b)$ - "ingen liker b"
- $\forall x(\mathrm{Idol}(x) \to \mathrm{Liker}(x, x))$ - "alle idoler liker seg selv"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; =\rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y(y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"
- $\neg\exists x(0 = sx)$ - "0 er ikke etterfølgeren til noe"
- $\exists x \exists y \neg(x = y)$ - "det fins to forskjellige objekter"

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en signatur

$$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \ldots}_{\textit{konstantsymboler}}; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \ldots}_{\textit{funksjonssymboler}}; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \ldots}_{\textit{relasjonssymboler}} \rangle.$$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	$\langle\ a$	; f, g	; P, R	$\rangle$
aritmetikk 1:	$\langle\ 0$	; $s, +$	; $=$	$\rangle$
aritmetikk 2:	$\langle\ 0, 1$	; $+, \times$	; $=, <$	$\rangle$
mengdelære:	$\langle\ \emptyset$	; $\cap, \cup$	; $=, \in$	$\rangle$
familierelasjoner:	$\langle$ Ola, Kari	; mor, far	; Mor, Far, Slektning	$\rangle$
beundring:	$\langle\ a, b$	;	; Idol, Liker	$\rangle$

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
   - Hvis φ er en formel og x er en variabel,så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

   Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$
10:	Et idol blir likt av alle:	$\forall x(\text{Idol}(x) \rightarrow \forall y \text{Liker}(y, x))$

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ betegner mengden av frie variable i termen t.

Definisjon (Lukket term)

En term t er lukket hvis $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, dvs. t inneholder ingen frie variable.

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ har vi:

- *Termen $f(x, a)$ har en fri variabel x.*
- *Termen $f(a, b)$ har ingen frie variable og er en lukket term.*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ av frie variable i t være definert rekursivt ved:

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel x_i, og*
- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant c_i, og*
- $\mathrm{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n)$, *for et funksjonssymbol f med aritet n.*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- *x er bundet*
- *y er fri*
- *z er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- *x er bundet*
- *x er fri*
- *y er fri*
- *z er bundet*

Oppgave

Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[t/x] = \begin{cases} Qy(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall xPxy)$
- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/y] = (Pxa \wedge \forall xPxa)$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x\mathrm{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x\mathrm{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x\mathrm{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z\mathrm{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x\mathrm{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathrm{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- *$\forall xPxa$ er lukket*
- *$\forall xPxy$ er ikke lukket*
- *Pxy er ikke lukket, men åpen*
- *Pab er åpen og lukket*

3 Førsteordens logikk - semantikk

- Introduksjon
- Modeller
- Hovedeksempel - et figurspråk
- Tolkning av termer og formler
- Oppsummering
- Språk og modeller - et komplekst forhold
- En utvidelse av figurspråket
- Oppfyllbarhet av førsteordens formler
- Bruke språket til å beskrive modeller

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?
  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil modeller gi oss en semantikk.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid d_1, \dots, d_n \in D\}$$

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.*

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \dots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \dots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

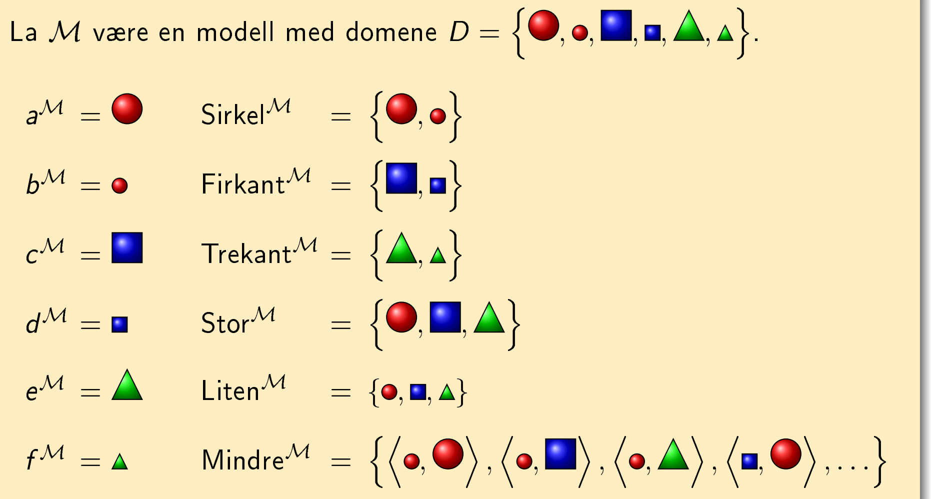
  Liten(x): "x er liten"

  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

La oss nå lage en modell for dette språket!

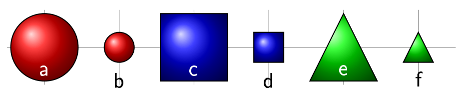
Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket



Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant
- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant
- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- Når vi tolker termer og formler fra språket $\mathcal{L}$ i en modell $\mathcal{M}$, så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Oppgave

Dette er en rekursiv definisjon. Skriv ut hele definisjonen.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.*
- *$\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \to \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \neg\mathrm{Liten}(x))$
- $\neg\mathrm{Stor}(a) \land \forall x \mathrm{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \to \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \to \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \to \forall x \mathrm{Stor}(x)$
- $\exists x Px \to \exists x(Px \land Qx)$

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (🏭 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

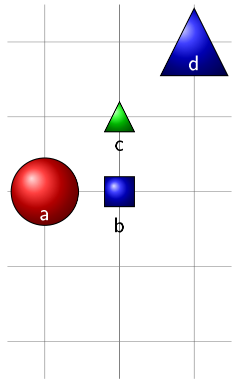
Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å “fange inn” og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

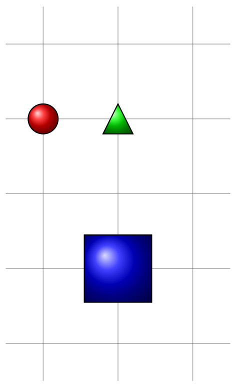
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} = $, $b^{\mathcal{M}} = $, $c^{\mathcal{M}} = $, $d^{\mathcal{M}} = $
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle , \rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \land \neg\text{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(c, a, d) \land \neg\text{Mellom}(c, b, d)$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

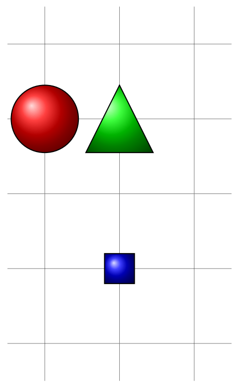


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \text{Liten}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$, kan vi konkludere med **JA**.

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

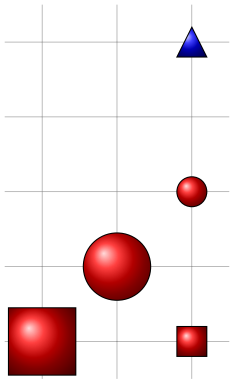


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \text{Stor}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \text{Stor}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{ , , \}$ og $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$, så kan vi konkludere med **NEI**.

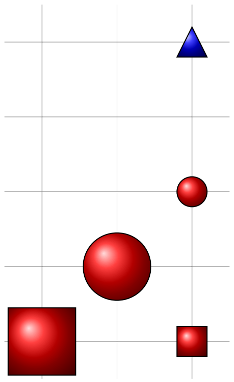
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



$$\mathcal{M} \models \forall x(\text{Stor}(x) \to \text{Sirkel}(x))$$
$$\Updownarrow$$
for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så
$$\mathcal{M} \models \text{Stor}(\bar{a}) \to \text{Sirkel}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så
$\mathcal{M} \models \text{Stor}(\bar{a})$ impliserer $\mathcal{M} \models \text{Sirkel}(\bar{a})$
$$\Updownarrow$$
for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så
hvis $a \in \text{Stor}^{\mathcal{M}}$, så $a \in \text{Sirkel}^{\mathcal{M}}$
$$\Updownarrow$$
"alle store objekter er sirkler"

Påstander holder ikke.

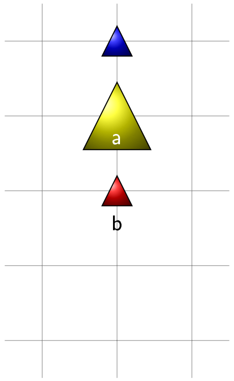
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



$$\mathcal{M} \models \forall x(\text{Sirkel}(x) \to \exists y \exists z \text{Mellom}(x, y, z))$$
$$\Updownarrow$$
for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så
$$\mathcal{M} \models \text{Sirkel}(\bar{a}) \to \exists y \exists z \text{Mellom}(\bar{a}, y, z)$$
$$\Updownarrow$$
for alle sirkler $a \in |\mathcal{M}|$ så
$$\mathcal{M} \models \exists y \exists z \text{Mellom}(\bar{a}, y, z)$$
$$\Updownarrow$$
for alle sirkler $a \in |\mathcal{M}|$ så
fins $b, c \in \mathcal{M}$ slik at $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

Påstanden holder, fordi
$\mathcal{M} \models$ Mellom(, ,) og
$\mathcal{M} \models$ Mellom(, ,).

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

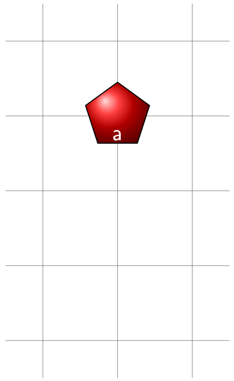


Er følgende formler oppfyllbare samtidig?

1. $\text{Stor}(a) \land \text{Liten}(b)$
2. $\forall x(\text{Trekant}(x))$
3. $\forall x(\text{Inntil}(x, a) \lor \text{Inntil}(x, b))$
4. $\neg\exists x(\text{VenstreFor}(x, a) \lor \text{HoyreFor}(x, a))$
5. $\forall x(\text{Stor}(x) \to \exists y \text{Over}(y, x))$

Svaret er JA!

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



Er følgende formler oppfyllbare?

1. $\neg\text{Sirkel}(a) \land \neg\text{Trekant}(a) \land \neg\text{Firkant}(a))$

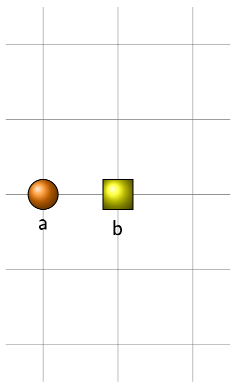
   Svaret er JA!

   La $|\mathcal{M}| = \{$ $\}$ og $a^{\mathcal{M}} =$.
2. $\text{Liten}(a) \land \text{Stor}(a)$

   Svaret er JA!

   La $|\mathcal{M}| = \{$🚲$\}$, $a^{\mathcal{M}} =$ 🚲 og
   $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$🚲$\}$

Bruke språket til å beskrive modeller



Gi en mengde formler som beskriver denne modellen nøyaktig, dvs. som har denne og (essensielt) ingen andre modeller.

1. $\text{Sirkel}(a) \land \text{Firkant}(b)$
2. $\forall x \text{Liten}(x)$
3. $\text{VenstreFor}(a, b)$
4. $\forall x(\text{Inntil}(x, a) \lor \text{Inntil}(x, b))$
5. $\forall x(\neg\text{Over}(x, a) \land \neg\text{Under}(x, a))$
6. $\forall x(\neg\text{VenstreFor}(x, a) \land \neg\text{HoyreFor}(x, b))$

Ganske vanskelig...

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Qa, Pa \vdash Pa}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Qa \vdash Qa, \neg Pa}}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa$}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\BinaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\end{prooftree}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som sekvent, aksiom, utledning og bevis for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær formel.

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall xPx \vdash \exists xQx$
- $Pa, \forall x(Qx \to Rx) \vdash Qb \to Rb$
- $\forall xPx, Pa \vdash Pa, \exists xPa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

t er en lukket term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\,\mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor veldefinerte i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK *er α- og β-reglene fra utsagnslogisk* LK *og γ- og δ-reglene.*

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

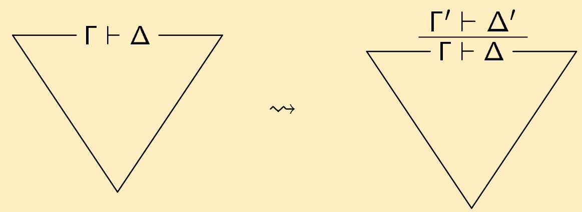
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.

Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

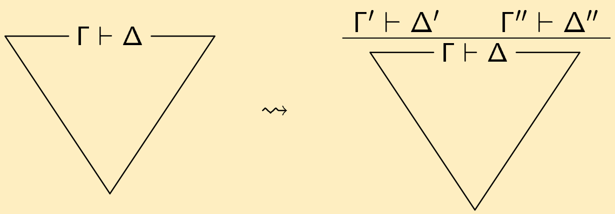
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel 1

$$\begin{array}{c} \times \\ \forall xPx, Pa \vdash Pa \\ \hline \forall xPx \vdash Pa \\ \hline \forall xPx \vdash \forall xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
  - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \forall xPx, Po \vdash \exists xPx, Po \\ \hline \forall xPx \vdash \exists xPx, Po \\ \hline \forall xPx \vdash \exists xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall xPx$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall xPx$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists xPx$ sann.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 3

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \times \\ \forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa \\ \hline \forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa \\ \hline \forall x(Px \land Qx) \vdash Pa \\ \hline \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ \forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa \\ \hline \forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa \\ \hline \forall x(Px \land Qx) \vdash Qa \\ \hline \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xQx \end{array} \\ \hline \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall xPx$ og $\forall xQx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby \\ \hline \forall yLya, Lba \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLya \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy \\ \hline \exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists yL\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy \forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx
\end{array}
$$

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$
\begin{array}{c}
\times \\
Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)
\end{array}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som:
  "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

5. Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle
   - Overblikk
   - Antakelser om førsteordens språk
   - Reglene bevarer falsifiserbarhet
   - Alle aksiomer er gyldige
   - Sunnhetsbeviset

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn...

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av $\mathcal{L}$-formler.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK*-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.*

Lemma

Alle LK*-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.*

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ- og δ-reglene har egenskapen.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \Delta}\, \mathrm{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Oppgave: bevis lemmaet. Hint: induksjon på φ.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \Delta}\, \mathrm{L}\exists \qquad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.
  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\ \mathrm{R}\forall \qquad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x\varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \not\models \varphi[a/x]$.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

  slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leq i \leq n$.
- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \ldots, s_n)$.
- Dermed oppfylles en formel i succedenten, $P(t_1, \ldots, t_n)$.

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.

$\square$

Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekventer.
- Det er ingen "hull" i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå "fra φ følger ψ" på:
  1. Semantisk: $\varphi \vDash \psi$, hvis φ er sann, så er ψ sann.
  2. Syntaktisk: $\varphi \vdash \psi$, det fins et bevis for sekventen $\varphi \vdash \psi$ / fra antakelsen φ, så kan ψ bevises.
- Med sunnhet og kompletthet, så blir disse ekvivalente.

Kurt Gödel (1906-1978)

Kurt Gödel
(1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.
- Har hatt enorm innflytelse på logikk, matematikk og filosofi.
- Det er han som først viste kompletthet av førsteordens logikk (1929).
- Er mest kjent for ufullstendighetsteoremene (1931) og at kontinuumshypotesen er konsistent med mengdelæren (1937).

Overblikk

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Dvs. det finnes en modell som gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Merk at vi uansett går fra en universell påstand ("for alle modeller") til en eksistensiell påstand ("det fins et bevis").

Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en garanti for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet strategi.

Definisjon (Strategi)

En strategi for LK *er en angivelse av hvordan* LK*-reglene systematisk skal anvendes på formler i* LK*-utledninger.*

- Med vilje litt vagt. Mye kan være en strategi.
- Vi er interessert i strategier som garanterer at vi får et bevis til slutt hvis det er slik at bevis fins. La oss kalle slike strategier for "gode".

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av type θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ-slutning.

Eksempel

$$Pa \land Pb, Qa \lor Qb \vdash \exists x Px, \forall x Px$$

- *$Pa \land Pb$ er en α-formel*
- *$Qa \lor Qb$ er en β-formel*
- *$\exists x Px$ er en γ-formel*
- *$\forall x Px$ er en δ-formel*

Strategier

En enkel strategi

1. Anvend α-regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α. Gå til ❷.
2. Anvend β-regler så mange ganger som mulig.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P, Q \vdash P} \qquad \overset{\times}{P, Q \vdash Q}}{P, Q \vdash P \land Q}\;\text{❷}}{P \land Q \vdash P \land Q}\;\text{❶}$$

- Denne strategien er ikke "god". Det kan hende at ❶ må anvendes etter at ❷ er anvendt.

En "god" strategi for utsagnslogikk.

1. Anvend α-regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
2. Anvend β-regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
3. Hvis det er mulig å anvende en α-regel, gå til 1.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P, Q \vdash P, R, R} \qquad \overset{\times}{P, Q \vdash Q, R, R}}{P, Q \vdash P \land Q, R, R}\ ❷}{\neg(P \land Q), P, Q \vdash R, R}\ ❶ \qquad \overset{\times}{R, P, Q \vdash R, R}}{\neg(P \land Q) \lor R, P, Q \vdash R, R}\ ❷}{\neg(P \land Q) \lor R, P \vdash R, Q \to R}\ ❶}{\neg(P \land Q) \lor R \vdash P \to R, Q \to R}\ ❶}{\neg(P \land Q) \lor R \vdash (P \to R) \lor (Q \to R)}\ ❶
$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være "god"?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pffa, Pfa, Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}
$$

2. Vi må forsøke å sette inn "alle termer" for γ-formler.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pgga, Pga, Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}{Pga, Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}}{Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}}{\forall x Px \vdash Qga, Pfffb}
$$

- Vi må kunne snakke om "alle termer" på en presis måte...

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, Herbranduniverset til T, den minste mengden slik at:

- *$\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T. Hvis det ikke er noen konstanter i T, så er en parameter o fra par (kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.*
- *Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.*

Herbranduniverset til en mengde formler er Herbranduniverset til mengden av termer som forekommer i formlene. Herbranduniverset til en gren er Herbranduniverset til mengden av formler som forekommer i grenen.

- Intuitivt, så er Herbranduniverset til T mengden av alle *lukkede* termer som kan genereres fra termer i T.

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$.Da er Herbranduniverset til Tmengden

$$\{o, fo, ffo, fffo, \ldots\}$$

Eksempel

La $T = \{a, f(x)\}$.Da er Herbranduniverset til Tmengden

$$\{a, fa, ffa, fffa, \ldots\}$$

Eksempel

La $F = \{\forall x H(f(g(x)))\}$.Da er Herbranduniverset til F mengden

$$\{o, fo, go, fgo, gfo, ffo, ggo, , \ldots\}$$

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
  - alle formler blir analysert før eller senere, og
  - alle γ-formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
  1. Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
  2. eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.
- Vi kan tenke at vi går til *grensen* i konstruksjonen av en utledning, enten ved at ingen regler lenger kan anvendes eller ved å fortsette med regelanvendelser i det uendelige. Vi kaller slike for grenseutledninger.
- Vi inkluderer altså uendelige trær når vi snakker om grenseutledninger.
- Merk: hvis alle grener i en utledning kan lukkes, så er utledningen endelig.

Rettferdige strategier

- Vi skal nå abstrahere over alle "gode" strategier.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren som ikke er lukket, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*
2. *Hvis φ er en γ-formel på formen $Qx\psi$ i en gren som ikke er lukket, så er $\psi[t/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.*

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T. Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre. Hvis grenen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ er generert, så finner man neste node u_{n+1} ved samme type resonnering. Denne prosessen gir en uendelig gren.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettferdig strategi. "En maksimal utledning".
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

  $G^\top$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G,

  $G^\perp$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

  A være mengden av alle atomære formler som forekommer i $G^\top$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell $\mathcal{M}$ for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til $\mathcal{M}$ være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n, la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.
  - Da vil $t^{\mathcal{M}} = t$ for alle lukkede termer t.
  - Alle termer tolkes som seg selv.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, la $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ hvis og bare hvis $R(t_1, \ldots, t_n) \in A$.
- En slik modell kalles ofte for en Herbrandmodell eller en termmodell.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$) at modellen $\mathcal{M}$ gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:

  Hvis $\varphi \in G^{\top}$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
  Hvis $\varphi \in G^{\perp}$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ i $G^{\top}$.

- Da må $R(t_1, \ldots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$.

Basissteg 2: φ er en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ i $G^{\perp}$.

- Siden G ikke er lukket, må $R(t_1, \ldots, t_n) \notin A$ og $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \notin R^{\mathcal{M}}$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models R(t_1, \ldots, t_n)$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \land \psi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \land \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G.
- Da vil $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\top}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet har vi $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$.

Formler med kvantorer gjenstår.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^{\top}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $a^{\mathcal{M}} = a$, så vil også $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x\varphi \in G^{\perp}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.
- Vi har dermed for alle termer t i Herbranduniverset til grenen følgende
  - $\varphi[t/x] \in G^{\perp}$
  - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
  - $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{t}/x]$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Husk at domenet til $\mathcal{M}$ er Herbranduniverset til grenen.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^{\perp}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^{\perp}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $a^{\mathcal{M}} = a$, så vil også $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{a}/x]$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x\varphi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.
- Vi har dermed for alle termer t i Herbranduniverset til grenen følgende
  - $\varphi[t/x] \in G^{\top}$
  - $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
  - $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{t}/x]$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Husk at domenet til $\mathcal{M}$ er Herbranduniverset til grenen.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.
- For å lage en motmodell på denne måten, kan det være nødvendig å anvende reglene uendelig mange ganger.
- Ofte fins det endelige motmodeller der hvor denne metoden gir en uendelig motmodell. Å finne endelige motmodeller der hvor det fins er ikke lett. Dette er noe det forskes på.
- Idéen i kompletthetsbeviset er viktig. Konstruksjonen av modeller fra noe rent syntaktisk. Et filosofisk spørsmål: Er det egentlig et skille mellom syntaks og semantikk?

$$
\dfrac{\underset{\times}{\varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{G}{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb} \qquad \overset{\times}{Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}}{Qa, \varphi, Pb \to Qb, Pa \vdash Qb}}{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}}{Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx}}{\dfrac{\varphi, Pa \to Qa, Pa \vdash \forall x Qx}{\underbrace{\forall x(Px \to Qx)}_{\varphi}, Pa \vdash \forall x Qx}}
$$

- Herbranduniverset til grenen G, og domenet til $\mathcal{M}$, er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^{\top}$ vil $a \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^{\top}$ vil $a \in Q^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \to Qa$.
- Siden $Qb \in G^{\perp}$ vil $b \notin Q^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall x Qx$.
- Siden $Pb \in G^{\perp}$ vil $b \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$ og $\mathcal{M} \models Pb \to Qb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Px \to Qx)$.
- $\mathcal{M}$ oppfyller alle formlene i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formlene i $G^{\perp}$.

(Greit. Begge grener lukkes.)

$$
\dfrac{\dfrac{\varphi, Paa \to Pab, Paa \vdash Pab}{\varphi, Paa \vdash Pab} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba} \qquad \overset{G}{Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Pba \to Pbb, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa} \qquad \overset{\times}{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Paa \to Pab, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \to Pxb)}_{\varphi}, Paa \lor Pba \vdash Pab}
$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til $\mathcal{M}$ - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^{\perp}$ vil $\langle a, b\rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^{\top}$ vil $\langle b, a\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \lor Pba$.
- Siden $Paa \in G^{\perp}$ vil $\langle a, a\rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \to Pab$.
- Siden $Pbb \in G^{\top}$ vil $\langle b, b\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pbb$ og $\mathcal{M} \models Pba \to Pbb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Pxa \to Pxb)$.
- $\mathcal{M}$ oppfyller alle formlene i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formlene i $G^{\perp}$.