INF3170 – Logikk

Forelesning 5: Automatisk bevissøk

Arild Waaler

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

29. oktober 2013

Dagens plan

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
  - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
  - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- Sunnhet sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- Kompletthet sikrer oss at det *finnes* et bevis for enhver gyldig sekvent.
- Kalkylen sier imidlertid ingenting om hvordan man finner bevis for gyldige sekventer!
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- La oss forsøke!

Noen begreper

- En utledning er lukket hvis alle grenene er lukket.
- En utledning er utvidbar hvis det er mulig å anvende en regel på en formel i en løvsekvent i utledningen.
- En søkealgoritme er komplett hvis den *finner* et bevis for enhver gyldig sekvent.

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$;
while (π ikke er lukket) **do**
  if (π ikke er utvidbar) **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else
    $\varphi :=$ ikke-atomær formel i løvsekvent i π;
    utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ;
  end if
end while
return *"gyldig"*;

- Algoritmen er komplett hvis utvelgelsen av φ er rettferdig.

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
  1. Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
  2. Strategi for valg av utvidelse av utledningen.
  3. Hvor effektiv er selve utvidelsen, dvs. regelanvendelsen?
- I første runde ser vi på punkt 1 og 3.
- Senere introduseres koblingskalkylen, som gir oppgav til en strategi for valg av utvidelser av utledningene.
- La oss starte med punkt 3 – effektiviteten til regelanvendelsene.

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α- og β-reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\,\mathrm{R}\land$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.
- Riktignok får vi en del formelkopiering i β-regelen, men dette kan optimaliseres med f.eks. pekere i en objektorientert implementasjon.
- δ-regelen setter inn en ny parameter for den bundne variabelen:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\exists$$

- Parametrene kan nummereres: utføres i konstant tid.

γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi}\,\mathrm{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med alle termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ-formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å finne bevis så tidlig som mulig?

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pa, \ldots, Pfffa \vdash Pfffa, Qga}{\vdots}}{\forall x Px, Pa \vdash Pfffa, Qga}}{\forall x Px \vdash Pfffa, Qga}$$

$$\underset{1}{a}, \underset{2}{fa}, \underset{3}{ga}, \underset{4}{ffa}, \underset{5}{fga}, \ldots, \underset{i}{fffa}, \ldots$$

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{a/u}{\forall xPx, Pu \vdash Pa}}{\forall xPx \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{b/v}{\forall xPx, Pv \vdash Pb}}{\forall xPx \vdash Pb}}{\forall xPx \vdash Pa \land Pb}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?
- Problemet kan løses med unifiseringsalgoritmer.

δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\dfrac{\dfrac{\overset{b/u,\ a/v}{Lua \vdash Lbv}}{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{kan ikke lukkes}}{Luf(u) \vdash Lg(v)v}}{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.
- På den måten sikrer vi at termen introdusert av δ-regelen er ny uansett hva slags verdi vi velger å instansiere de frie variablene med.

Oppsummering

- Vi skal introdusere en fri-variabel sekventkalkyle og vise at den er sunn og komplett.
- γ-reglene introduserer nye frie variable og δ-reglene introduserer Skolemtermer.
- Ved hjelp av unifiseringsalgoritmer finner vi substitusjoner som lukker utledningen.

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s.
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer samtidig.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – substitusjoner – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.
- Notasjon: Når vi anvender en substitusjon σ på en formel φ eller en term t skriver vi $\varphi\sigma$ eller $t\sigma$ istedenfor $\sigma(\varphi)/\sigma(t)$.

Definisjon (Substitusjon)

En substitusjon er en funksjon σ fra mengden variable $\mathcal{V}$ til mengden av termer $\mathcal{T}$ i et gitt førsteordens språk.

- *Støtten (support) eller støttemengden (support set) til σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.*
- *σ er grunn dersom $x\sigma$ er en lukket term for alle variable x i støttemengden til σ.*

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \ldots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \ldots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen ϵ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable x kalles identitetssubstitusjonen.
- Identitetssubstitusjonen kan skrives $\{\}$ siden den har tom støttemengde.

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

- er en substitusjon slik at
  - $y\sigma = a$
  - $z\sigma = fx$
  - $v\sigma = v$ for alle andre variable
- er ikke en grunn substitusjon

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ *for et konstantsymbol* c.
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ *for en funksjonsterm* $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau = f(y, x)$

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \to Qy)\sigma = \forall xPx \to Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

La σ være en substitusjon. Substitusjonen σ begrenset på x, skrevet σ_x, er definert slik at

$$y\sigma_x = \begin{cases} y & \text{hvis } y = x \\ y\sigma & \text{ellers} \end{cases}$$

for enhver variabel y.

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$
4. $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, *hvor* $Q \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.
- Dette kan vi unngå ved å omdøpe bundne variable.

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{\cancel{fx/x}, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall xP(x, y)\sigma = \forall x(P(x, y)\sigma_x) = \forall xP(x, a)$
- $\exists z(Px \to Qz)\sigma = \exists z((Px \to Qz)\sigma_z) = \exists z(Pfx \to Qz)$

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ: $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ.

Definisjon (Komposisjon av substitusjoner)

La σ og τ være substitusjoner. Komposisjonen av σ og τ er en substitusjon skrevet $\sigma\tau$ slik at $x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau$ for hver variabel x.

- Oppgave: vis at $\varphi(\sigma\tau) = (\varphi\sigma)\tau$ for alle formler φ og alle substitusjoner σ og τ.

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \ldots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \ldots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \ldots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der $z_1, \ldots, z_m$ er de variablene blant $y_1, \ldots, y_k$ som ikke er blant $x_1, \ldots, x_n$.

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x, (y\tau)/y\} = \{x/x, x/y\} = \{x/y\}$.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

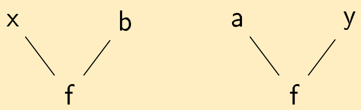
- En substitusjon som gjør termene s og t syntaktisk like, kalles en unifikator for s og t.
- To termer er unifiserbare hvis de har en unifikator.

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

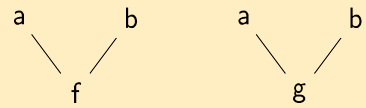
Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



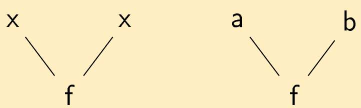
- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Symbolene i høyre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{b/y\}$.

Er $f(a, b)$ og $g(a, b)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er ulike, og kan *ikke* unifiseres!

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Vi må anvende $\{a/x\}$ på x i både venstre og høyre barn.
- Symbolene i høyre barn er nå ulike, og kan *ikke* unifiseres!

Er x og $f(x)$ unifiserbare?

- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på x i høyre tre.
- På posisjon 1 ser vi nå at symbolene x og f er ulike.
- Hvis vi unifiserer med $\{f(x)/x\}$, må vi igjen erstatte x i høyre tre.
- Sånn kan vi holde på en stund...

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er ikke unifiserbare.
- En variabel x er ikke unifiserbar med en term som *inneholder* x.

- Vi skal lage en unifiseringsalgoritme, som finner alle unifikatorer for to termer.
- Problem: To termer har potensielt uendelig mange unifikatorer! Vi kan ikke returnere alle...
- Løsning: Finne en representant σ for mengden av unifikatorer slik at alle andre unifikatorer kan konstrueres fra σ.
- En slik unifikator kalles en mest generell unifikator.

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er mer generell enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

Er $\{f(a)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Nei, for det finnes ingen substitusjon σ slik at $\{f(y)/x\} = \{f(a)/x\}\sigma$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Ja, siden $\{f(y)/x\} = \{f(y)/x\}\epsilon$. (Husk: ϵ er identitetssubstitusjonen.)

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- *en unifikator for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.*
- *en mest generell unifikator (mgu) for s og t hvis*
  - *den er en unifikator for s og t, og*
  - *den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t.*

Vi sier at s og t er unifiserbare hvis de har en unifikator.

La $s = f(x)$ og $t = f(y)$.

- $\sigma_1 = \{a/x, a/y\}$ er en unifikator for s og t
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ og $\sigma_3 = \{x/y\}$ er også unifikatorer for s og t
- σ_2 og σ_3 er de mest generelle unifikatorene for s og t

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like opp til omdøping av variable.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en variabelomdøping hvis

1. *$x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og*
2. *$x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.*

Er disse substitusjonene variabelomdøpinger?

- $\sigma_1 = \{z/x, x/y, y/z\}$ Ja.
- $\sigma_2 = \{z/x, y/z\}$ Nei, siden $y\sigma_2 = z\sigma_2$.
- $\sigma_3 = \{z/x, x/y, y/z, a/u\}$ Nei, siden $u\sigma_3$ ikke er en variabel.

Unikhet "opp til omdøping av variable"

Påstand

Hvis σ_1 og σ_2 er mest generelle unifikatorer for to termer s og t, så finnes en variableomdøping η slik at $\sigma_1\eta = \sigma_2$.

- Bevis som oppgave?

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av deltermer av en term t er den minste mengden T slik at

- *$t \in T$, og*
- *hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.*

Alle termer i T utenom t er ekte deltermer av t.

La $s = gx$.

- Deltermer er: x, gx
- Ekte deltermer er: x

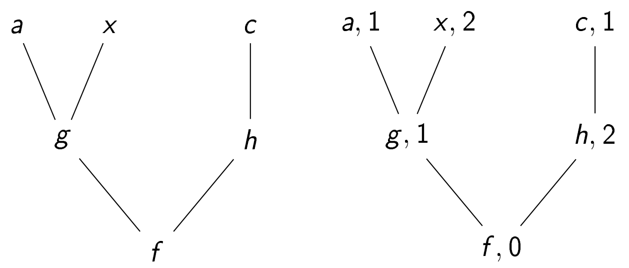
La $t = f(x, a)$.

- Deltermer er: x, a, $f(x, a)$
- Ekte deltermer er: x, a

- En term er altså en delterm av seg selv.

Nummererte termtrær

- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtreet:



- Slike trær kalles nummererte termtrær.
- Vi referer til roten til det nummererte termtreet til en term t som rot(t).

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er ulike.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

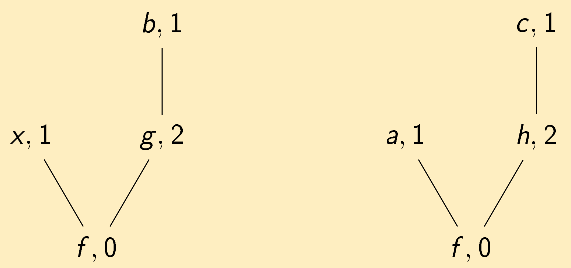
Et kritisk par for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

- *k_1 er en delterm av t_1*
- *k_2 er en delterm av t_2*
- *når vi tenker på termer som nummererte termtrær så er*
  - *rot(k_1) forskjellig fra rot(k_2)*
  - *stien fra rot(t_1) til rot(k_1) er lik stien fra rot(t_2) til rot(k_2)*

- Merk: stiene kan være tomme, dvs. at termene er ulike allerede i rotsymbolet. Tomme stier er trivielt like...

Eksempel

La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- *Er $\langle b, c\rangle$ kritisk par for s og t?*
  - *Nei, stien fra rot(s) til rot(b) er ulik stien fra rot(t) til rot(c).*
- *Er $\langle x, a\rangle$ kritisk par for s og t? Ja.*
- *Er $\langle gb, hc\rangle$ kritisk par for s og t? Ja.*

Algoritme: unifiser(t_1, t_2)

$\sigma := \epsilon$;
while ($t_1\sigma \neq t_2\sigma$) **do**
  velg et kritisk par $\langle k_1, k_2\rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;
  if (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**
    return *"ikke unifiserbare"*;
  end if
  $x :=$ den av k_1, k_2 som er variabel (hvis begge er, så velg én);
  $t :=$ den av k_1, k_2 som ikke er x;
  if (x forekommer i t) **then**
    return *"ikke unifiserbare"*;
  end if
  $\sigma := \sigma\{t/x\}$;
end while
return σ;

Egenskaper ved unifiseringsalgoritmen

- Hvis termene t_1 og t_2 er unifiserbare, så returnerer algoritmen en mest generell unifikator for t_1 og t_2.
- Denne mgu-en er en representant for alle andre unifikatorer for t_1 og t_2.
- Hvis t_1 og t_2 ikke er unifiserbare, så returnerer algoritmen *"ikke unifiserbare"*.

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{u/a,\ v/fa}{Lufu \vdash Lav}}{\exists yLuy \vdash Lav}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists xLax}$$

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- *tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og*
- *tellbart uendelig mange Skolemfunksjoner av hver aritet,*

slik at symbolene i $\mathcal{S}$ er forskjellig fra symbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\text{sko}}$ være språket vi får ved å utvide $\mathcal{L}$ med konstant- og funksjonssymbolene i $\mathcal{S}$.

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\text{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists x Px$

Lukkede sekventer

Nr. 1 og 2 er *lukkede* sekventer.

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists$$

u er en ny fri variabel

- Med *ny* mener vi her at u ikke må forekomme fritt i utledningen fra før.

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\ \mathrm{R}\forall$$

f er en ny Skolemfunksjon

$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

- Med *ny* mener vi her at f ikke må forekomme i utledningen fra før.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

- *γ- og δ-reglene for frie variable, og*
- *α- og β-reglene fra utsagnslogisk* LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.
  - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
- Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!
- Formlene i de andre sekventene i en utledning behøver imidlertid ikke være lukkede.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx}\,\mathsf{R}\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall xPx, Pu \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall xPx, Pv \vdash Pb}{\forall xPx \vdash Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall xPx \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

L∀ i høyre og venstre gren kan ikke introdusere den samme variabelen, av samme grunn som over.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{R}\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{L}\forall$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. et som ikke forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan R∀ i høyre gren ikke introdusere den samme Skolemkonstanten som R∀ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ-reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.
- I utledningen over vet vi ikke hvilke symboler som forekommer i konklusjonen før vi har instansiert u!

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall xPx}\,\mathsf{R}\forall}{\vdash Px \to \forall xPx}\,\mathsf{R}\!\to$$

Rotsekventen er ikke lukket.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\exists yPxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x\forall yPyx}{\forall x\exists yPxy, Puf(u) \vdash \forall yPyv, \exists x\forall yPyx}\,\mathsf{R}\forall}{\forall x\exists yPxy, Puf(u) \vdash \exists x\forall yPyx}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x\exists yPxy, \exists yPuy \vdash \exists x\forall yPyx}\,\mathsf{L}\exists}{\forall x\exists yPxy \vdash \exists x\forall yPyx}\,\mathsf{L}\forall$$

De to δ-slutningene introduserer det samme Skolemfunksjonssymbolet.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- *σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes atomære formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.*
- *σ lukker π hvis σ lukker alle løvsekventene i π.*

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- *π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og*
- *σ er en grunn substitusjon som lukker π.*

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være grunn, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.
- Senere skal vi se at vi kan lempe på dette kravet og tillate lukkende substitusjoner som ikke er grunne.

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- *σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.*
- *σ lukker π, siden den lukker den eneste løvsekventen.*
- *Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$.*

Merk:

Slik vi har definert fri-variabel LK vil f.eks. $\langle \pi, \sigma' \rangle$ der $\sigma' = \{v/u\}$ ikke være et bevis, siden σ' ikke er grunn.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathrm{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathrm{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- *σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.*
- *σ lukker høyre løvsekvent: $(Pv)\sigma = Pb$.*
- *σ lukker π, siden den lukker begge løvsekventene.*
- *Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash Pa \land Pb$.*

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{R}\forall \quad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{R}\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathsf{L}\forall$$

- *Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b samtidig.*
- *Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx$ basert på utledningen π.*
- *Er rotsekventen gyldig...?*

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke variabeltilordninger for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.
- Vi definerer så rekursivt hvordan vi kan tolke en vilkårlig førsteordens formel i en modell under en gitt variabeltilordning.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1, \ldots$
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2, \ldots$
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3, \ldots$
  - $\ldots$

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* c
- $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ *for en funksjonsterm*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

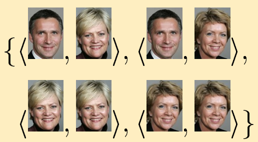
- *Atomære fml:* $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \dots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ *hvis det ikke er tilfelle at* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for alle* a *i* $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for minst en* a *i* $|\mathcal{M}|$.

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$



Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$

$\Updownarrow$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$

$\Updownarrow$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

$\Updownarrow$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

$\Updownarrow$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

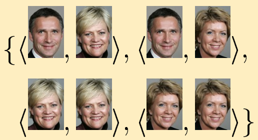
- **Ja**, både $e =$  og $e =$ .

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$



Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$

$\Updownarrow$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$

$\Updownarrow$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

$\Updownarrow$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

$\Updownarrow$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

- **Nei**, ingen slik $e \in |\mathcal{M}|$ finnes.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en motmodell, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som ikke er lukket.
- Vi ønsker at en motmodell til en sekvent skal være en motmodell *uavhengig* av hvordan vi tolker de frie variablene.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.
- Men hvis vi tolker x som a, ser vi at $\mathcal{M}'$ ikke lenger er en motmodell.
- Her finnes en variabeltilordning som gjør at $\mathcal{M}'$ ikke er en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne, og*
- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Δ usanne.*

En sekvent er

- *falsifiserbar hvis den har en motmodell*
- *gyldig hvis den ikke er falsifiserbar*

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har ikke denne egenskapen!

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen
$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$
- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er ikke falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene ikke er det!

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er falsifiserbar.
- Vi skal så vise at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.
- Når vi har denne egenskapen, er resten av sunnhetsbeviset for fri-variabel LK tilsvarende beviset for den grunne kalkylen.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne, og*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\perp}$ usanne.*
- *$\mathcal{M}$ falsifiserer π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$ så finnes en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.*

En utledning er falsifiserbar hvis det finnes en modell som falsifiserer den.

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:
  - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_1.
  - Hvis $\mu_2(u) = b$, så har vi at den venstre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_2.

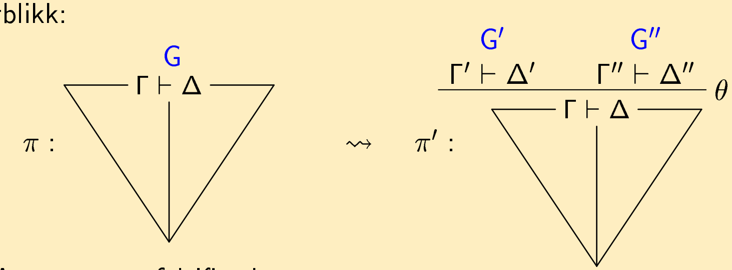
Lemma

Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK *anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.*

- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.
- Vi får ett tilfelle for hver regel.
- Alle tilfellene bortsett fra δ-reglene (L$\exists$ og R$\forall$) går på samme måte.
- Vi viser først hvordan beviset går for disse og tar δ-reglene til slutt.

Bevis.

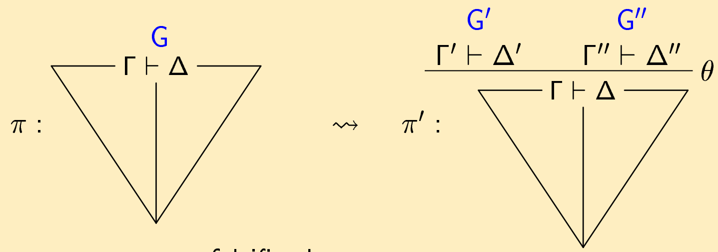
Overblikk:



- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:
  1. Den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ er en annen enn G.
  2. Den falsifiserte grenen er G.

□

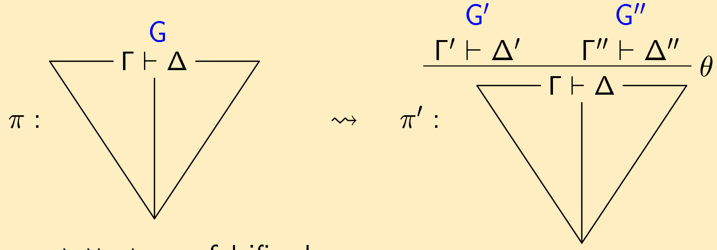
Bevis (tilfelle 1).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ ikke er G.
- Da er den falsifiserte grenen i π også en gren i π'.

□

Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Må vise at enten G′ eller G″ er falsifisert i π'.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Vi viser argumentet for L$\lor$ og L$\forall$.

$\square$

Bevis (tilfelle 2 – L$\lor$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\lor$$

$$\Big|\ G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \lor B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G′ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models B$, så er G″ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

$\square$

Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall$$

$$\Big|\ G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G′ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

$\square$

Steget fra $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$ til $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$ kan vises ved strukturell induksjon på formler. Mulig ukeoppgave...

Bevis (δ-regler).

Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for L$\exists$.

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\exists$$

$$\Big|\ G$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x\varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n) = e$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x\varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.
- Påstand: $\mathcal{M}'$ falsifiserer π'. Oppgave!

$\square$

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

- Basistilfellet: rotsekventen er falsifiserbar.
- Induksjonssteget: følger fra Lemma.

□

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ, så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Bevis.

Ukeoppgave. □

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathrm{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathrm{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

□

Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Husk:

- En modell $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for $\mathcal{M}$ gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under $\mathcal{M}$ være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.
  - *"Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener."*
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en åpen gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G: $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \iff P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in G^{\perp}$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
  - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i $G^{\top}$ eller $G^{\perp}$.
- Det følger at $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq G^{\top}$ og $\Delta \subseteq G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.
  - For γ-formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G.
- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ, kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den grunnede åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ-reglene imidlertid frie variable istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av rettferdig strategi.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ-formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*
2. *Hvis φ er en γ-formel på formen $Qx\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for uendelig mange variable u.*

Rettferdig substitusjon

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall xPx \vdash Qfa}$$

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.
- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til Gσ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$ Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt ikke er i Gσ, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra Gσ vil derfor ikke gjøre $\forall xPx$ sann.

Rettferdig substitusjon II

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall xPx \vdash Qfa}$$

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.
- Vi har nå at $Pt \in$ Gτ for alle termer t i Herbrand-universet til Gτ.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra Gτ oppfylle $\forall xPx$.
- Vi kaller τ en rettferdig substitusjon.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π. La σ være en substitusjon.

- *σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.*
- *σ er rettferdig m.h.p. grenen G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i G.*
- *σ er rettferdig m.h.p. utledningen π hvis σ er rettferdig m.h.p. hver gren i π.*

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $G\sigma$ kun inneholder lukkede formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket. Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Teorem (Sunnhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK*, så er den gyldig.*

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Vi skal ta en kort repetisjon av sunnhetsargumentet.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β-reglene i fri-variabel LK bevarer ikke falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.
- En modell falsifiserer en utledning hvis ethvert valg av variabeltilordning for modellen gir en falsifisert gren.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen
$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$
- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er ikke falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene ikke er det!

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
  - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell $\mathcal{M}$.
- For α-, β- og γ-reglene kan vi vise at $\mathcal{M}$ også falsifiserer den utvidete utledningen.
- Det holder ikke for δ-reglene. Her konstruerer vi en ny modell (basert på $\mathcal{M}$) som falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f.
- For hver variabeltilordning μ for $\mathcal{M}'$ spesifiserer vi $\mathcal{M}', \mu$ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at $\mathcal{M}', \mu$ gjør $\varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x]$ sann dersom $\mathcal{M}, \mu$ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π og $\mathcal{M}$ er lik $\mathcal{M}'$ utenom f, så er π falsifisert av $\mathcal{M}'$.
- Ved å bruke de semantiske definisjonene, viser vi så at $\mathcal{M}'$ falsifiserer den utvidete utledningen.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathrm{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathrm{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

$\square$