

INF3170 – Logikk

Forelesning 5: Automatisk bevissøk

Arild Waaler

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

29. oktober 2013



Dagens plan

- 1 Automatisk bevissøk
- 2 Automatisk bevissøk II
- 3 Kompletthet av fri-variabel LK
- 4 Repetisjon: sannhet av fri-variabel LK

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
 - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
 - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- **Sunnhet** sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- **Kompletthet** sikrer oss at det *finnes* et bevis for enhver gyldig sekvent.
- Kalkylen sier imidlertid ingenting om **hvordan** man finner bevis for gyldige sekventer!
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- La oss forsøke!

Noen begreper

- En utledning er **lukket** hvis alle grenene er lukket.
- En utledning er **utvidbar** hvis det er mulig å anvende en regel på en formel i en løvsekvent i utledningen.
- En søkealgoritme er **komplett** hvis den *finner* et bevis for enhver gyldig sekvent.

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$) $\pi := \Gamma \vdash \Delta$;**while** (π ikke er lukket) **do** **if** (π ikke er utvidbar) **then**

return “ikke gyldig”;

else $\varphi :=$ ikke-atomær formel i løvsekvent i π ; utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ ; **end if****end while**

return “gyldig”;

- Algoritmen er komplett hvis utvelgelsen av φ er **rettferdig**.

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
 - ① Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
 - ② Strategi for valg av utvidelse av utledningen.
 - ③ Hvor effektiv er selve utvidelsen, dvs. regelanvendelsen?
- I første runde ser vi på punkt 1 og 3.
- Senere introduseres **koblingskalkylen**, som gir oppgav til en strategi for valg av utvidelser av utledningene.
- La oss starte med punkt 3 – effektiviteten til regelanvendelsene.

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α - og β -reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.
- Riktignok får vi en del formelkopiering i β -regelen, men dette kan optimaliseres med f.eks. pekere i en objektorientert implementasjon.
- δ -regelen setter inn en ny parameter for den bundne variabelen:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists$$

- Parametrene kan nummereres: utføres i konstant tid.

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x .
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ -formel med **alle** termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ -formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å **finne bevis så tidlig som mulig**?

$$\frac{\forall xPx, Pa, \dots, Pffa \vdash Pffa, Qga}{\vdots}$$

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pa \vdash Pffa, Qga}{\forall xPx \vdash Pffa, Qga}}{\vdots}$$

$$a, \underset{1}{fa}, \underset{2}{ga}, \underset{3}{ffa}, \underset{4}{fga}, \dots, \underset{5}{fffa}, \dots, \underset{i}{\dots}$$

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

$$\frac{\frac{a/u}{\forall x P_x, P_u \vdash P_a} \quad \frac{b/v}{\forall x P_x, P_v \vdash P_b}}{\forall x P_x \vdash P_a \wedge P_b}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?
- Problemet kan løses med **unifiseringsalgoritmer**.

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\frac{\frac{b/u, a/v}{Lua \vdash Lbv}}{\frac{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x \exists yLxy \vdash \exists x \forall yLyx}}$$

kan ikke lukkes

$$\frac{\frac{Luf(u) \vdash Lg(v)v}}{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x \exists yLxy \vdash \exists x \forall yLyx}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en **Skolemfunksjon**, og u_1, \dots, u_n er alle variablene som forekommer fritt i δ -formelen.

- På den måten sikrer vi at termen introdusert av δ -regelen er **ny** uansett hva slags verdi vi velger å instansiere de frie variablene med.

Oppsummering

- Vi skal introdusere en **fri-variabel sekventkalkyle** og vise at den er **sun**n og **komplett**.
- γ -reglene introduserer nye **frie variable** og δ -reglene introduserer **Skolemtermer**.
- Ved hjelp av **unifiseringsalgoritmer** finner vi **substitusjoner** som **lukker** utledningen.

1 Automatisk bevissøk

- Introduksjon
- Substitusjoner
- Unifisering

2 Automatisk bevissøk II

- Fri-variabel sekventkalkyle
- Semantikk
- Sunnhet

3 Kompletthet av fri-variabel LK

4 Repetisjon: sunnhet av fri-variabel LK

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s .
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer **samtidig**.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – **substitusjoner** – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.
- Notasjon: Når vi anvender en substitusjon σ på en formel φ eller en term t skriver vi $\varphi\sigma$ eller $t\sigma$ istedenfor $\sigma(\varphi)/\sigma(t)$.

Definisjon (Substitusjon)

En *substitusjon* er en funksjon σ fra mengden variable \mathcal{V} til mengden av termer \mathcal{T} i et gitt førsteordens språk.

- *Støtten* (support) eller *støttemengden* (support set) til σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.
- σ er *grunn* dersom $x\sigma$ er en lukket term for alle variable x i støttemengden til σ .

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \dots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \dots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen ϵ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable x kalles **identitetssubstitusjonen**.
- Identitetssubstitusjonen kan skrives $\{\}$ siden den har tom støttemengde.

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\tau = \{a/y, fx/z\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $y\sigma = a$
 - $z\sigma = fx$
 - $v\sigma = v$ for alle andre variable
- er **ikke** en grunn substitusjon

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau = f(y, x)$

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall xPx \rightarrow Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

La σ være en substitusjon. Substitusjonen σ **begrenset** på x , skrevet σ_x , er definert slik at

$$y\sigma_x = \begin{cases} y & \text{hvis } y = x \\ y\sigma & \text{ellers} \end{cases}$$

for enhver variabel y .

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
- 3 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- 4 $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.
- Dette kan vi unngå ved å omdøpe bundne variable.

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z \}$
- $\sigma_y = \{ fx/x, \cancel{a/y}, y/z \}$
- $\sigma_z = \{ fx/x, a/y, \cancel{y/z} \}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x (P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$
- $\exists z (Px \rightarrow Qz)\sigma = \exists z ((Px \rightarrow Qz)\sigma_z) = \exists z (Pfx \rightarrow Qz)$

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ : $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ .

Definisjon (Komposisjon av substitusjoner)

La σ og τ være substitusjoner. **Komposisjonen** av σ og τ er en substitusjon skrevet $\sigma\tau$ slik at $x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau$ for hver variabel x .

- Oppgave: vis at $\varphi(\sigma\tau) = (\varphi\sigma)\tau$ for alle formel φ og alle substitusjoner σ og τ .

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x, (y\tau)/y\} = \{x/x, x/y\} = \{x/y\}$.

1 Automatisk bevissøk

- Introduksjon
- Substitusjoner
- Unifisering

2 Automatisk bevissøk II

- Fri-variabel sekventkalkyle
- Semantikk
- Sunnhet

3 Kompletthet av fri-variabel LK

4 Repetisjon: sunnhet av fri-variabel LK

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .
- **Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!**

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

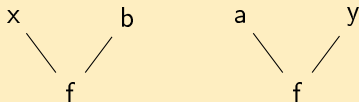
- En substitusjon som gjør termene s og t syntaktisk like, kalles en **unifikator** for s og t .
- To termer er **unifiserbare** hvis de har en unifikator.

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

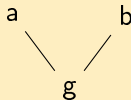
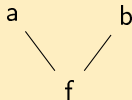
Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



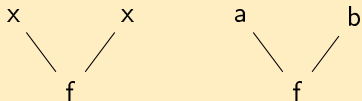
- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Symbolene i høyre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{b/y\}$.

Er $f(a, b)$ og $g(a, b)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er ulike, og kan *ikke* unifiseres!

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Vi må anvende $\{a/x\}$ på x i både venstre og høyre barn.
- Symbolene i høyre barn er nå ulike, og kan *ikke* unifiseres!

Er x og $f(x)$ unifiserbare?

		x
x		f

- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på x i høyre tre.
- På posisjon 1 ser vi nå at symbolene x og f er ulike.
- Hvis vi unifiserer med $\{f(x)/x\}$, må vi igjen erstatte x i høyre tre.
- Sånn kan vi holde på en stund...

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er **ikke** unifiserbare.
 - En variabel x er **ikke** unifiserbar med en term som *inneholder* x .
-
- Vi skal lage en **unifiseringsalgoritme**, som finner **alle** unifikatorer for to termer.
 - Problem: To termer har potensielt uendelig mange unifikatorer! Vi kan ikke returnere alle...
 - Løsning: Finne en **representant** σ for mengden av unifikatorer slik at alle andre unifikatorer kan konstrueres fra σ .
 - En slik unifikator kalles en **mest generell unifikator**.

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er *mer generell* enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

Er $\{f(a)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Nei, for det finnes ingen substitusjon σ slik at $\{f(y)/x\} = \{f(a)/x\}\sigma$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Ja, siden $\{f(y)/x\} = \{f(y)/x\}\epsilon$. (Husk: ϵ er identitetssubstitusjonen.)

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en **unifikator** for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en **mest generell unifikator** (mgu) for s og t hvis
 - den er en unifikator for s og t , og
 - den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t .

Vi sier at s og t er **unifiserbare** hvis de har en unifikator.

La $s = f(x)$ og $t = f(y)$.

- $\sigma_1 = \{a/x, a/y\}$ er en unifikator for s og t
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ og $\sigma_3 = \{x/y\}$ er også unifikatorer for s og t
- σ_2 og σ_3 er de mest generelle unifikatorene for s og t

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en **variabelomdøping** hvis

- 1 $x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og
- 2 $x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.

Er disse substitusjonene variabelomdøpinger?

- $\sigma_1 = \{z/x, x/y, y/z\}$ Ja.
- $\sigma_2 = \{z/x, y/z\}$ Nei, siden $y\sigma_2 = z\sigma_2$.
- $\sigma_3 = \{z/x, x/y, y/z, a/u\}$ Nei, siden $u\sigma_3$ ikke er en variabel.

Unikhet “opp til omdøping av variable”

Påstand

Hvis σ_1 og σ_2 er mest generelle unifikatorer for to termer s og t , så finnes en variableomdøping η slik at $\sigma_1\eta = \sigma_2$.

- Bevis som oppgave?

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x, gx
- Ekte deltermer er: x

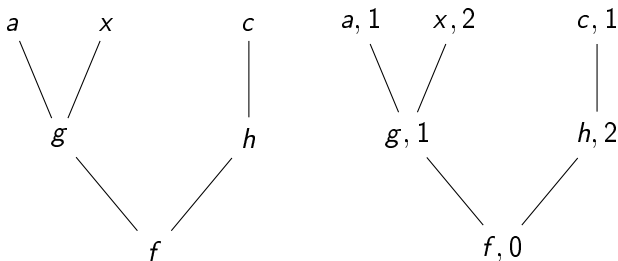
La $t = f(x, a)$.

- Deltermer er: $x, a, f(x, a)$
- Ekte deltermer er: x, a

- En term er altså en delterm av seg selv.

Nummererte termtrær

- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtræet:



- Slike trær kalles **nummererte termtrær**.
- Vi referer til roten til det nummererte termtræet til en term t som $\text{rot}(t)$.

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

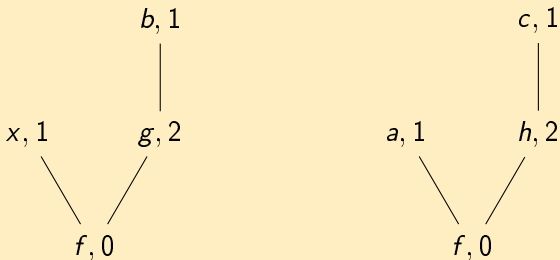
Definisjon (Kritisk par)

Et **kritisk par** for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

- k_1 er en delterm av t_1
- k_2 er en delterm av t_2
- når vi tenker på termer som nummererte termtrær så er
 - $\text{rot}(k_1)$ forskjellig fra $\text{rot}(k_2)$
 - stien fra $\text{rot}(t_1)$ til $\text{rot}(k_1)$ er **lik** stien fra $\text{rot}(t_2)$ til $\text{rot}(k_2)$
- Merk: stiene kan være tomme, dvs. at termene er ulike allerede i rotsymbolet. Tomme stier er trivielt like...

Eksempel

La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- Er $\langle b, c \rangle$ kritisk par for s og t ?
 - *Nei, stien fra rot(s) til rot(b) er ulik stien fra rot(t) til rot(c).*
- Er $\langle x, a \rangle$ kritisk par for s og t ? *Ja.*
- Er $\langle gb, hc \rangle$ kritisk par for s og t ? *Ja.*

Algoritme: $\text{unifiser}(t_1, t_2)$ $\sigma := \epsilon;$ **while** $(t_1\sigma \neq t_2\sigma)$ **do**velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;**if** (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if** $x :=$ den av k_1, k_2 som er variabel (hvis begge er, så velg én); $t :=$ den av k_1, k_2 som ikke er x ;**if** (x forekommer i t) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if** $\sigma := \sigma\{t/x\};$ **end while**return σ ;

Egenskaper ved unifiseringsalgoritmen

- Hvis termene t_1 og t_2 er unifiserbare, så returnerer algoritmen en mest generell unifikator for t_1 og t_2 .
- Denne mgu-en er en representant for alle andre unifikatorer for t_1 og t_2 .
- Hvis t_1 og t_2 **ikke** er unifiserbare, så returnerer algoritmen *“ikke unifiserbare”*.

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ -slutninger utsettes ved å sette inn en **fri** variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ -slutninger gjør at vi må la δ -slutninger introdusere **Skolemtermer**.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\frac{\frac{u/a, v/fa}{Lufv \vdash Lav}}{\exists yLuy \vdash Lav}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists xLax}$$

Utvidet språk

- δ -slutningene introduserer **Skolemkonstanter** og **Skolemfunksjoner**.
- Disse symbolene er **nye** symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er **utvidet** med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk. La S være en mengde som består av

- tellbart uendelig mange **Skolemkonstanter**, og
- tellbart uendelig mange **Skolemfunksjoner** av hver aritet,

slik at symbolene i S er forskjellig fra symbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{sko} være språket vi får ved å utvide \mathcal{L} med konstant- og funksjonssymbolene i S .

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk.

- En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i \mathcal{L}^{sko} .
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **lukket** hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

- 1 $\forall xPx \vdash Pa$
- 2 $\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx$
- 3 $\forall xPxy \vdash Pufy$
- 4 $Pu \vdash Pa$
- 5 $Pu \vdash Pu, \exists xPx$

Lukkede sekventer

Nr. 1 og 2 er *lukkede* sekventer.

γ -regleneDefinisjon (γ -regler i fri-variabel LK)

γ -reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} \text{R}\exists$$

u er en *ny* fri variabel

- Med *ny* mener vi her at u ikke må forekomme fritt i utledningen fra før.

δ -regleneDefinisjon (δ -regler i fri-variabel LK) *δ -reglene* i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

 f er en *ny* Skolemfunksjon $\vec{u} = u_1, \dots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

- Med *ny* mener vi her at f ikke må forekomme i utledningen fra før.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ - og δ -reglene for frie variable, og
 - α - og β -reglene fra utsagnslogisk LK.
-
- Mengden av **fri-variabel utledninger** defineres induktivt:
 - **Basismengden** er mengden av **lukkede** sekventer.
 - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
 - Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!
 - Formlene i de andre sekventene i en utledning behøver imidlertid ikke være lukkede.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx} R\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx} L\forall$$

$R\exists$ kan ikke introdusere u , siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} L\forall \quad \frac{\forall xPx, Pv \vdash Pb}{\forall xPx \vdash Pb} L\forall}{\forall xPx \vdash Pa \wedge Pb} R\wedge$$

$L\forall$ i h yre og venstre gren kan ikke introdusere den samme variabelen, av samme grunn som over.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\frac{\frac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx} R\forall \quad \frac{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx} R\forall}{\frac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vee Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx} L\forall} LV$$

- Vi krever at hver δ -slutning introduserer et **nytt** Skolemsymbol, dvs. et som **ikke** forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan $R\forall$ i høyre gren **ikke** introdusere den samme Skolemkonstanten som $R\forall$ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ -reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.
- I utledningen over vet vi ikke hvilke symboler som forekommer i konklusjonen før vi har instansiert u !

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

~~$$\frac{\frac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px} R\forall}{\vdash Px \rightarrow \forall x Px} R\rightarrow$$~~

Rotsekventen er ikke lukket.

~~$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x \forall y Pyx} R\forall}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \exists x \forall y Pyx} R\exists}{\forall x \exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x \forall y Pyx} L\exists}{\forall x \exists y Pxy \vdash \exists x \forall y Pyx} LV$$~~

De to δ -slutningene introduserer det samme Skolemfunksjonssymbolet.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å **lukke** en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ **lukker** en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes atomære formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- σ **lukker** π hvis σ lukker alle løvsekventene i π .

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et *fri-variabel LK-bevis* for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og
- σ er en *grunn* substitusjon som lukker π .

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være *grunn*, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.
- Senere skal vi se at vi kan lempe på dette kravet og tillate lukkende substitusjoner som ikke er grunne.

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx} \text{R}\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx} \text{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.
- σ lukker π , siden den lukker den eneste løvsekventen.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et **bevis** for sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$.

Merk:

Slik vi har definert fri-variabel LK vil f.eks. $\langle \pi, \sigma' \rangle$ der $\sigma' = \{v/u\}$ ikke være et bevis, siden σ' ikke er grunn.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\frac{\frac{\forall x P x, P u \vdash P a}{\forall x P x \vdash P a} L\forall \quad \frac{\forall x P x, P v \vdash P b}{\forall x P x \vdash P b} L\forall}{\forall x P x \vdash P a \wedge P b} R\wedge$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ lukker venstre løvsekvent: $(P u)\sigma = P a$.
- σ lukker høyre løvsekvent: $(P v)\sigma = P b$.
- σ lukker π , siden den lukker begge løvsekventene.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et **bevis** for sekventen $\forall x P x \vdash P a \wedge P b$.

Eksempel (3)

La π v re utledningen

$$\frac{\frac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx} \text{RV} \quad \frac{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx} \text{RV}}{\frac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vee Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx} \text{LV}} \text{LV}$$

- Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden *u ikke* kan instansieres med både *a* og *b* samtidig.
- Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx$ basert på utledningen π .
- Er rotsekventen gyldig...?

1 Automatisk bevissøk

- Introduksjon
- Substitusjoner
- Unifisering

2 Automatisk bevissøk II

- Fri-variabel sekventkalkyle
- Semantikk
- Sunnhet

3 Kompletthet av fri-variabel LK

4 Repetisjon: sunnhet av fri-variabel LK

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke **variabeltilordninger** for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.
- Vi definerer så rekursivt hvordan vi kan tolke en vilkårlig førsteordens formel i en modell under en gitt variabeltilordning.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La \mathcal{M} være en modell. En **variabeltilordning** for \mathcal{M} er en funksjon fra mengden av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell \mathcal{M} siden den tolker variable som elementer i domenet til \mathcal{M} .
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
 - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1, \mu_1(x_2) = 1, \mu_1(x_3) = 1, \dots$
 - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2, \mu_2(x_2) = 2, \mu_2(x_3) = 2, \dots$
 - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1, \mu_3(x_2) = 2, \mu_3(x_3) = 3, \dots$
 - \dots

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Anta at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell. La μ være en variabeltilordning for \mathcal{M} . Tolkningen av en term t i \mathcal{M} under μ , skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ for et konstantsymbol c
- $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ for en funksjonsterm

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Anta at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell. La μ være en variabeltilordning for \mathcal{M} . Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er **sann** i \mathcal{M} under μ ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ n r φ er sann i \mathcal{M} under μ .

- Atom re fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \dots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}, \mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M}, \mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det **ikke** er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ **og** $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ **eller** $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ **impliserer** $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ **for alle** a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ **for minst en** a i $|\mathcal{M}|$.

Eksempel I

Modellen \mathcal{M}

$$|\mathcal{M}| = \{ \text{[Mann]}, \text{[Kvinn1]}, \text{[Kvinn2]} \}$$

$$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$$

$$\{ \langle \text{[Mann]}, \text{[Kvinn1]} \rangle, \langle \text{[Mann]}, \text{[Kvinn2]} \rangle, \\ \langle \text{[Kvinn1]}, \text{[Kvinn1]} \rangle, \langle \text{[Kvinn1]}, \text{[Kvinn2]} \rangle \}$$

Variabeltilordningen μ_1

$$\mu_1(x) = \text{[Kvinn1]}$$

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?

- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}, \mu_2}, x^{\mathcal{M}, \mu_1} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle e, \text{[Kvinn1]} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

- **Ja**, b de $e = \text{[Mann]}$ og $e = \text{[Kvinn1]}$.

Eksempel II

Modellen \mathcal{M}

$$|\mathcal{M}| = \{ \text{[M1]}, \text{[M2]}, \text{[M3]} \}$$

$$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$$

$$\{ \langle \text{[M1]}, \text{[M2]} \rangle, \langle \text{[M1]}, \text{[M3]} \rangle, \\ \langle \text{[M2]}, \text{[M2]} \rangle, \langle \text{[M3]}, \text{[M3]} \rangle \}$$

Variabeltilordningen μ_2

$$\mu_2(x) = \text{[M1]}$$

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}, \mu_2}, x^{\mathcal{M}, \mu_2} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle e, \text{[M1]} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

- **Nei**, ingen slik $e \in |\mathcal{M}|$ finnes.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en **lukket** sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
 - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfyller minst én formel i Δ .
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som **ikke** er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en **motmodell**, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og **gjør** alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som **ikke** er lukket.
- Vi ønsker at en motmodell til en sekvent skal være en motmodell *uavhengig* av hvordan vi tolker de frie variablene.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen \mathcal{M} slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil \mathcal{M} være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være \mathcal{M}' slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b , ser vi at \mathcal{M}' oppfyller Px og falsifiserer Pa .
- Men hvis vi tolker x som a , ser vi at \mathcal{M}' ikke lenger er en motmodell.
- Her finnes en variabeltilordning som gjør at \mathcal{M}' ikke er en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell \mathcal{M} er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger også av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ f r for **hver enkelt** variabeltilordning for \mathcal{M} .
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell \mathcal{M} er en **motmodell** til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for \mathcal{M} :

- \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i Γ sanne, og
- \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i Δ usanne.

En sekvent er

- **falsifiserbar** hvis den har en motmodell
- **gyldig** hvis den ikke er falsifiserbar

1 Automatisk bevissøk

- Introduksjon
- Substitusjoner
- Unifisering

2 Automatisk bevissøk II

- Fri-variabel sekventkalkyle
- Semantikk
- Sunnhet

3 Kompletthet av fri-variabel LK

4 Repetisjon: sunnhet av fri-variabel LK

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

*En sekventkalkyle er **sunnt** dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.*

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har **ikke** denne egenskapen!

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.
 - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så \mathcal{M} gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er **ikke** falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene **ikke** er det!

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β -slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er **falsifiserbar**.
- Vi skal så vise at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.
- Når vi har denne egenskapen, er resten av sunnhetsbeviset for fri-variabel LK tilsvarende beviset for den grunne kalkylen.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
 - G^\top alle formler som forekommer i en antecedent på G , og
 - G^\perp alle formler som forekommer i en succedent på G .

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la \mathcal{M} være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for \mathcal{M} . En gren G i π er **falsifisert** av \mathcal{M} under μ hvis
 - \mathcal{M}, μ går alle formlene i G^\top sanne, **og**
 - \mathcal{M}, μ går alle formlene i G^\perp usanne.
- \mathcal{M} **falsifiserer** π hvis for alle variabeltilordninger μ for \mathcal{M} så finnes en gren i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .

En utledning er **falsifiserbar** hvis det finnes en modell som falsifiserer den.

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ -kopiene ikke vises):

$$\frac{\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- \mathcal{M} falsifiserer π :
 - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av \mathcal{M} under μ_1 .
 - Hvis $\mu_2(u) = b$, så har vi at den venstre grenen er falsifisert av \mathcal{M} under μ_2 .

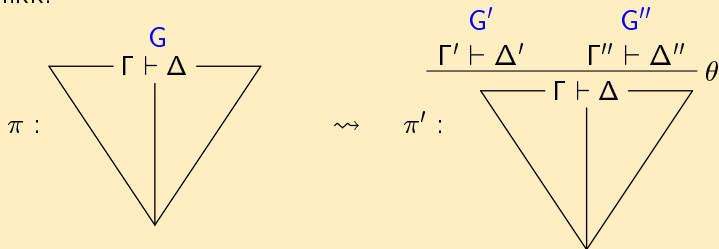
Lemma

Hvis en slutningsregel fra fri-variabel LK anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.

- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.
- Vi får ett tilfelle for hver regel.
- Alle tilfellene bortsett fra δ -reglene ($L\exists$ og $R\forall$) går på samme måte.
- Vi viser først hvordan beviset går for disse og tar δ -reglene til slutt.

Bevis.

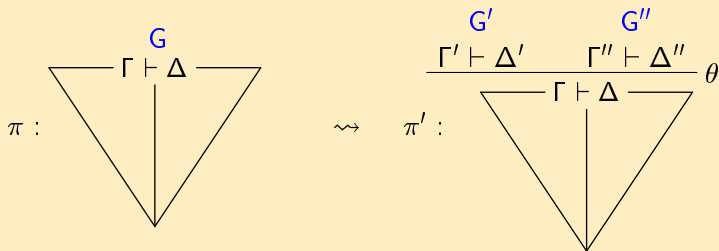
Overblikk:



- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La \mathcal{M} være en modell som falsifiserer π .
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for \mathcal{M} .
- Vi får to tilfeller:
 - ❶ Den grenen i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ er en annen enn G .
 - ❷ Den falsifiserte grenen er G .



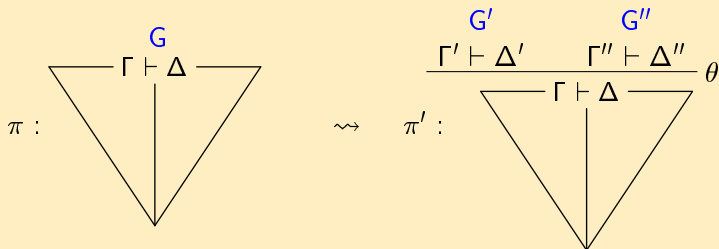
Bevis (tilfelle 1).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har valgt en modell \mathcal{M} som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for \mathcal{M} .
- Har antatt at grenen i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ **ikke** er G .
- Da er den falsifiserte grenen i π også en gren i π' .



Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell \mathcal{M} som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for \mathcal{M} .
- Har antatt at G i π er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Må vise at enten G' eller G'' er falsifisert i π' .
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Vi viser argumentet for $L\forall$ og $L\exists$.



Bevis (tilfelle 2 – LV).

$$\frac{\frac{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad \frac{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \text{ LV}$$

|
G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at \mathcal{M}, μ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G' falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models B$, så er G'' falsifisert av \mathcal{M} under μ .



Bevis (tilfelle 2 – $L\forall$).

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} L\forall$$

|
G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ og at \mathcal{M}, μ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for **alle** $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G' falsifisert av \mathcal{M} under μ .



Steget fra $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$ til $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$ kan vises ved strukturell induksjon på formler. Mulig ukeoppgave...

Bevis (δ -regler).

Når en δ -regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for $L\exists$.

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists$$

| G

- La \mathcal{M}' være en modell som er *lik* \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f , som defineres som følger:
 - La $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.
 - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n) = e$.
 - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x \varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.
- Påstand: \mathcal{M}' falsifiserer π' . Oppgave! □

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

- Basistilfellet: rotsekventen er falsifiserbar.
- Induksjonssteget: følger fra Lemma.



Lemma

La \mathcal{M} være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ . Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ , så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Bevis.

Ukeoppgave.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G , så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.



Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Husk:

- En modell \mathcal{M} **falsifiserer** $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for \mathcal{M} gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under \mathcal{M} være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i grunn LK.
 - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å konstruere en **grenseutledning** for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
 - enhver α -, β - og δ -formel på G er hovedformel i en slutning på G , og
 - hvis G inneholder en γ -formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G .
 - *“Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener.”*
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en **åpen** gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G :
 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^{\top} og falsifiserer alle formler i G^{\perp} .
 - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\perp}$.
 - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
 - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i G^{\top} eller G^{\perp} .
- Det følger at \mathcal{M} falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq G^{\top}$ og $\Delta \subseteq G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^\top og falsifiserer alle formler i G^\perp gjør vi strukturell induksjon på formelene i G .
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen \mathcal{M} .
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettfærdig strategi:
 - For α -, β - og δ -formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G , og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G .
 - For γ -formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G .
- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ , kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ .

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
 - bruke en **rettferdig strategi** til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
 - anvende en **grunn** substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den **grunnede** åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ -reglene imidlertid **frie variable** istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av **rettferdig strategi**.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ -formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ -slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ -formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er *rettferdig* hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

- 1 Hvis φ er en α -, β - eller δ -formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.
- 2 Hvis φ er en γ -formel på formen $Qx\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for *uendelig* mange variable u .

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .
- Utledningen har kun én gren, kall den G . Hvis vi anvender σ på formlene i G , så vil alle Pu_i -formlene bli til Pa .
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \dots$. Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt **ikke** er i $G\sigma$, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor **ikke** gjøre $\forall xPx$ sann.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx \vdash Qfa
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at

- $\tau(u_1) = a$, og
- $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.

- Vi anvender τ på formlene i grenen G .

- Vi har nå at $Pt \in G_\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til G_τ .
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra G_τ oppfylle $\forall xPx$.
- Vi kaller τ en **rettferdig substitusjon**.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa \\ \hline \forall xPx \vdash Qfa \end{array}}{\forall xPx \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er **rettferdig m.h.p. en γ -formel** $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ -slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er **rettferdig m.h.p. grenen** G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ -formlene i G .
- σ er **rettferdig m.h.p. utledningen** π hvis σ er rettferdig m.h.p. hver gren i π .

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes **ingen** substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å lage en **grenseutledning** med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er **rettferdig** m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G . Merk at $G\sigma$ kun inneholder **lukkede** formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er **lukket**. Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er **sunn**.

Teorem (Sunnhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, så er den gyldig.

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Vi skal ta en kort repetisjon av sunnhetsargumentet.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekvenser med frie variable.
- β -reglene i fri-variabel LK bevarer **ikke** falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.
- En modell **falsifiserer** en utledning hvis ethvert valg av variabeltilordning for modellen gir en falsifisert gren.

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.
 - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så \mathcal{M} gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er **ikke** falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene **ikke** er det!

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
 - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
 - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell \mathcal{M} .
- For α -, β - og γ -reglene kan vi vise at \mathcal{M} også falsifiserer den utvidete utledningen.
- Det holder ikke for δ -reglene. Her konstruerer vi en ny modell (basert på \mathcal{M}) som falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ -slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f .
- For hver variabeltilordning μ for \mathcal{M}' spesifiserer vi \mathcal{M}', μ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at \mathcal{M}', μ gjør $\varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x]$ sann dersom \mathcal{M}, μ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π og \mathcal{M} er lik \mathcal{M}' utenom f , så er π falsifisert av \mathcal{M}' .
- Ved å bruke de semantiske definisjonene, viser vi så at \mathcal{M}' falsifiserer den utvidete utledningen.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G , så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

