INTERPOLASJON

Vår 2006

Herman Ruge Jervell

LNS, Ifi, UiO

7th April 2006

De tre store teoremene i sekventkalkyle er

- Kompletthet

De tre store teoremene i sekventkalkyle er

- Kompletthet
- Snitteliminasjon

De tre store teoremene i sekventkalkyle er

- Kompletthet
- Snitteliminasjon
- Interpolasjon

De tre store teoremene i sekventkalkyle er

- Kompletthet
- Snitteliminasjon
- Interpolasjon

INTERPOLASJON

De tre store

De tre store teoremene i sekventkalkyle er

- Kompletthet
- Snitteliminasjon
- Interpolasjon

For et hvilket som helst system vi lager en sekventkalkyle for er det vesentlig å sjekke ut om – og kanskje under hvilke forutsetninger – de tre teoremene gjelder.

De tre store teoremene i sekventkalkyle er

- Kompletthet
- Snitteliminasjon
- Interpolasjon

For et hvilket som helst system vi lager en sekventkalkyle for er det vesentlig å sjekke ut om – og kanskje under hvilke forutsetninger – de tre teoremene gjelder.

- Kompletthet: om kalkylen fanger inn systemet

De tre store teoremene i sekventkalkyle er

- Kompletthet
- Snitteliminasjon
- Interpolasjon

For et hvilket som helst system vi lager en sekventkalkyle for er det vesentlig å sjekke ut om – og kanskje under hvilke forutsetninger – de tre teoremene gjelder.

- Kompletthet: om kalkylen fanger inn systemet
- Snitteliminasjon: om forskjellen mellom direkte og indirekte argumenter

De tre store teoremene i sekventkalkyle er

- Kompletthet
- Snitteliminasjon
- Interpolasjon

For et hvilket som helst system vi lager en sekventkalkyle for er det vesentlig å sjekke ut om – og kanskje under hvilke forutsetninger – de tre teoremene gjelder.

- Kompletthet: om kalkylen fanger inn systemet
- Snitteliminasjon: om forskjellen mellom direkte og indirekte argumenter
- Interpolasjon: om uavhengighet av tråder i sekventkalkylen

- vi behandler predikatkalkyle med likhet

- vi behandler predikatkalkyle med likhet
- har med de atomære utsagnene: verum $\top$ og falsum $\bot$ med negasjonen for dem gitt ved $\overline{\bot} = \top$ og $\overline{\top} = \bot$

- vi behandler predikatkalkyle med likhet
- har med de atomære utsagnene: verum $\top$ og falsum $\bot$ med negasjonen for dem gitt ved $\overline{\bot} = \top$ og $\overline{\top} = \bot$
- vi har flersortig kalkyle

- vi behandler predikatkalkyle med likhet
- har med de atomære utsagnene: verum $\top$ og falsum $\bot$ med negasjonen for dem gitt ved $\overline{\bot} = \top$ og $\overline{\top} = \bot$
- vi har flersortig kalkyle
- det er et diskusjonstema om en skal ha med funksjonssymboler – foreløpig er det bare variable som er termer

- vi behandler predikatkalkyle med likhet
- har med de atomære utsagnene: verum $\top$ og falsum $\bot$ med negasjonen for dem gitt ved $\overline{\bot} = \top$ og $\overline{\top} = \bot$
- vi har flersortig kalkyle
- det er et diskusjonstema om en skal ha med funksjonssymboler – foreløpig er det bare variable som er termer
- ekstra regel for verum og falsum

$$\frac{\Gamma, \bot}{\Gamma}$$

- vi behandler predikatkalkyle med likhet
- har med de atomære utsagnene: verum $\top$ og falsum $\bot$ med negasjonen for dem gitt ved $\overline{\bot} = \top$ og $\overline{\top} = \bot$
- vi har flersortig kalkyle
- det er et diskusjonstema om en skal ha med funksjonssymboler – foreløpig er det bare variable som er termer
- ekstra regel for verum og falsum

$$\frac{\Gamma, \bot}{\Gamma}$$

- som før har vi kompletthet og snitteliminasjon

- gitt en sekvent Γ

- gitt en sekvent Γ
- deler opp sekventen i en venstre del Γ^L og en høyre del Γ^R med $\Gamma = \Gamma^L, \Gamma^R$

- gitt en sekvent Γ
- deler opp sekventen i en venstre del Γ^L og en høyre del Γ^R med $\Gamma = \Gamma^L, \Gamma^R$
- det fins mange slike oppdelinger – vi setter ikke noe krav til den

INTERPOLASJON

Separere sekventer

- gitt en sekvent Γ
- deler opp sekventen i en venstre del Γ^L og en høyre del Γ^R med $\Gamma = \Gamma^L, \Gamma^R$
- det fins mange slike oppdelinger – vi setter ikke noe krav til den
- *fellesspråket* for Γ^L og Γ^R er gitt ved

- gitt en sekvent Γ
- deler opp sekventen i en venstre del Γ^L og en høyre del Γ^R med $\Gamma = \Gamma^L, \Gamma^R$
- det fins mange slike oppdelinger – vi setter ikke noe krav til den
- *fellesspråket* for Γ^L og Γ^R er gitt ved
  - verum $\top$ og falsum $\bot$

INTERPOLASJON

Separere sekventer

- gitt en sekvent Γ
- deler opp sekventen i en venstre del Γ^L og en høyre del Γ^R med $\Gamma = \Gamma^L, \Gamma^R$
- det fins mange slike oppdelinger – vi setter ikke noe krav til den
- *fellesspråket* for Γ^L og Γ^R er gitt ved
  - verum $\top$ og falsum $\bot$
  - predikatsymboler felles for dem begge

- gitt en sekvent Γ
- deler opp sekventen i en venstre del Γ^L og en høyre del Γ^R med $\Gamma = \Gamma^L, \Gamma^R$
- det fins mange slike oppdelinger – vi setter ikke noe krav til den
- *fellesspråket* for Γ^L og Γ^R er gitt ved
  - verum $\top$ og falsum $\bot$
  - predikatsymboler felles for dem begge
  - termer (dvs frie variable) felles for dem begge

INTERPOLASJON

Separere sekventer

- gitt en sekvent Γ
- deler opp sekventen i en venstre del Γ^L og en høyre del Γ^R med $\Gamma = \Gamma^L, \Gamma^R$
- det fins mange slike oppdelinger – vi setter ikke noe krav til den
- *fellesspråket* for Γ^L og Γ^R er gitt ved
  - verum $\top$ og falsum $\perp$
  - predikatsymboler felles for dem begge
  - termer (dvs frie variable) felles for dem begge
  - sorter felles for dem begge

- gitt en sekvent Γ
- deler opp sekventen i en venstre del Γ^L og en høyre del Γ^R med $\Gamma = \Gamma^L, \Gamma^R$
- det fins mange slike oppdelinger – vi setter ikke noe krav til den
- *fellesspråket* for Γ^L og Γ^R er gitt ved
    - verum $\top$ og falsum $\perp$
    - predikatsymboler felles for dem begge
    - termer (dvs frie variable) felles for dem begge
    - sorter felles for dem begge
    - konnektiver og kvantorer som vanlig

Theorem (Interpolasjon)

Gitt en oppdelt sekvent med $\vdash \Gamma^L, \Gamma^R$*. Da fins en formel* I *i fellesspråket med* $\vdash \Gamma^L, I$ *og* $\vdash \Gamma^R, \neg I$

I kalles en interpolant til Γ^L og Γ^R. Fra beviset skal vi se at vi har mer informasjon om oppbyggingen av I enn det som er uttrykt ved teoremet over.

En regel

$$\frac{\Delta}{\Gamma}$$

er separabel om fra derivasjon $\vdash \Delta$ av premisset og til enhver oppdeling av konklusjonen Γ^L, Γ^R

- fins oppdeling av premisset Δ^L, Δ^R

En regel

$$\frac{\Delta}{\overline{\overline{\Gamma}}}$$

er separabel om fra derivasjon $\vdash \Delta$ av premisset og til enhver oppdeling av konklusjonen Γ^L, Γ^R

- fins oppdeling av premisset Δ^L, Δ^R
- fra en interpolant I for Δ^L og Δ^R kan vi finne interpolant J for Γ^L og Γ^R

En regel

$$\frac{\Delta}{\Gamma}$$

er separabel om fra derivasjon $\vdash \Delta$ av premisset og til enhver oppdeling av konklusjonen Γ^L, Γ^R

- fins oppdeling av premisset Δ^L, Δ^R
- fra en interpolant I for Δ^L og Δ^R kan vi finne interpolant J for Γ^L og Γ^R

En regel

$$\frac{\Delta}{\Gamma}$$

er separabel om fra derivasjon $\vdash \Delta$ av premisset og til enhver oppdeling av konklusjonen Γ^L, Γ^R

- fins oppdeling av premisset Δ^L, Δ^R
- fra en interpolant I for Δ^L og Δ^R kan vi finne interpolant J for Γ^L og Γ^R

Tilsvarende for regler med flere premisser.

En regel

$$\frac{\Delta}{\Gamma}$$

er separabel om fra derivasjon $\vdash \Delta$ av premisset og til enhver oppdeling av konklusjonen Γ^L, Γ^R

- fins oppdeling av premisset Δ^L, Δ^R
- fra en interpolant I for Δ^L og Δ^R kan vi finne interpolant J for Γ^L og Γ^R

Tilsvarende for regler med flere premisser.
Vi skal vise at alle reglene – bortsett fra snitt – er separable. For hver regel er det to tilfeller – avhengig av om hovedformelen i regelen er i venstre eller høyre del.

En regel

$$\frac{\Delta}{\Gamma}$$

er separabel om fra derivasjon $\vdash \Delta$ av premisset og til enhver oppdeling av konklusjonen Γ^L, Γ^R

- fins oppdeling av premisset Δ^L, Δ^R
- fra en interpolant I for Δ^L og Δ^R kan vi finne interpolant J for Γ^L og Γ^R

Tilsvarende for regler med flere premisser.
Vi skal vise at alle reglene – bortsett fra snitt – er separable. For hver regel er det to tilfeller – avhengig av om hovedformelen i regelen er i venstre eller høyre del.
Teoremet følger.

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

Anta at vi har oppdeling $\Gamma^L, F \vee G$ og Γ^R og at vi har interpolant I med

$$\vdash \Gamma^L, F, G, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

Anta at vi har oppdeling $\Gamma^L, F \vee G$ og Γ^R og at vi har interpolant I med

$$\vdash \Gamma^L, F, G, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Men da har vi at I er også interpolant med

$$\vdash \Gamma^L, F \vee G, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}$$

Anta at vi har oppdeling $\Gamma^L, F \vee G$ og Γ^R og at vi har interpolant I med

$$\vdash \Gamma^L, F, G, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Men da har vi at I er også interpolant med

$$\vdash \Gamma^L, F \vee G, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Tilsvarende om oppdelingen er Γ^L og $\Gamma^R, F \vee G$. Vi kan bruke samme interpolant i konklusjonen som vi brukte i premisset.

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$$

Anta oppdeling $\Gamma^L, F \wedge G$ og Γ^R. Vi har interpolanter I og J med

$$\vdash \Gamma^L, F, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

$$\vdash \Gamma^L, G, J \qquad \vdash \Gamma^R, \neg J$$

Vi ser at $I \vee J$ er i fellesspråket til $\Gamma^L, F \wedge G$ og Γ^R og vi har

$$\vdash \Gamma^L, F \wedge G, I \vee J \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I \wedge \neg J$$

og $I \vee J$ er en interpolant.

Anta oppdeling Γ^L og $\Gamma^R, F \wedge G$. Vi har interpolanter I og J med

$$\vdash \Gamma^L, I \qquad \vdash \Gamma^R, F, \neg I$$

$$\vdash \Gamma^L, J \qquad \vdash \Gamma^R, G, \neg J$$

Vi ser at $I \wedge J$ er i fellesspråket til Γ^L og $\Gamma^R, F \wedge G$ og vi har

$$\vdash \Gamma^L, I \wedge J \qquad \vdash \Gamma^R, F \wedge G, \neg I \vee \neg J$$

og $I \wedge J$ er en interpolant.

γ-regelen er separabel – 1

$$\frac{\Gamma, \exists x.Fx, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

Anta oppdeling $\Gamma^L, \exists x.Fx$ og Γ^R. Vi har interpolant I med

$$\vdash \Gamma^L, \exists x.Fx, Ft, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Nå må vi bruke

- språket har ikke funksjonssymboler – dvs t er en variabel

Om t forekommer ikke i Γ^R og dermed heller ikke i I, så er I en interpolant med

$$\vdash \Gamma^L, \exists x.Fx, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Forts ...

$$\frac{\Gamma, \exists x.Fx, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx}$$

Anta oppdeling $\Gamma^L, \exists x.Fx$ og Γ^R. Vi har interpolant I med

$$\vdash \Gamma^L, \exists x.Fx, Ft, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Nå må vi bruke

- språket har ikke funksjonssymboler – dvs t er en variabel
- deler opp i tilfeller om t forekommer i Γ^R eller ikke

Om t forekommer ikke i Γ^R og dermed heller ikke i I, så er I en interpolant med

$$\vdash \Gamma^L, \exists x.Fx, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Forts . . .

Forts ...
Om t forekommer både i $\Gamma^L, \exists x.Fx$ og i Γ^R så kan vi fortsatt bruke I som interpolant. Anta så at t forekommer ikke i $\Gamma^L, \exists x.Fx$. Da kan vi skrive I som It og huske at t er en variabel. Da har vi

$$\vdash \Gamma^L, \exists x.Fx, It \qquad \vdash \Gamma^R, \neg It$$

og

$$\vdash \Gamma^L, \exists x.Fx, \forall x.Ix \qquad \vdash \Gamma^R, \exists x.\neg Ix$$

ved å legge merke til at egenvariabelbetingelsen er oppfylt her. Vi får altså interpolant $\forall x.Ix$.

γ-regelen er separabel – 3

Vi kommer nå til tilfellet at vi har en oppdeling Γ^L og $\Gamma^R, \exists x.Fx$. Vi har tilsvarende argument som over og kan konkludere at enten er I en interpolant eller så er $\exists x.Ix$ det.

Vi kommer nå til tilfellet at vi har en oppdeling Γ^L og $\Gamma^R, \exists x.Fx$. Vi har tilsvarende argument som over og kan konkludere at enten er I en interpolant eller så er $\exists x.Ix$ det.
Vi har lagt ned mye arbeid i å vise at γ-regelen er separabel. Det var vesentlig at språket ikke inneholdt funksjonssymboler.

$$\frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x, Fx}$$

der a er en egenvariabel. Anta at vi har oppdeling $\Gamma^L, \forall x.Fx$ og Γ^R. Det fins da interpolant I med

$$\vdash \Gamma^L, Fa, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Siden I er i fellesspråket og a er en egenvariabel, så inneholder ikke I varabelen a. Men da er I også interpolant for

$$\vdash \Gamma^L, \forall x.Fx, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Det andre tilfellet med oppdeling Γ^L og $\Gamma^R, \forall x.Fx$ er helt likedann.

$$\Gamma, L, \neg L$$

Har her fire mulige oppdelinger som gir følgende interpolanter

- $\Gamma^L, L, \neg L$ og Γ^R – interpolant $\perp$

$$\Gamma, L, \neg L$$

Har her fire mulige oppdelinger som gir følgende interpolanter

- $\Gamma^L, L, \neg L$ og Γ^R – interpolant $\perp$
- Γ^L, L og $\Gamma^R, \neg L$ – interpolant $\neg L$

$$\Gamma, L, \neg L$$

Har her fire mulige oppdelinger som gir følgende interpolanter

- $\Gamma^L, L, \neg L$ og Γ^R – interpolant $\perp$
- Γ^L, L og $\Gamma^R, \neg L$ – interpolant $\neg L$
- $\Gamma^L, \neg L$ og Γ^R, L – interpolant L

INTERPOLASJON

Aksiomene er separable

$$\Gamma, L, \neg L$$

Har her fire mulige oppdelinger som gir følgende interpolanter

- $\Gamma^L, L, \neg L$ og Γ^R – interpolant $\perp$
- Γ^L, L og $\Gamma^R, \neg L$ – interpolant $\neg L$
- $\Gamma^L, \neg L$ og Γ^R, L – interpolant L
- Γ^L og $\Gamma^R, l, \neg L$ – interpolant $\top$

$$\Gamma, L, \neg L$$

Har her fire mulige oppdelinger som gir følgende interpolanter

- $\Gamma^L, L, \neg L$ og Γ^R – interpolant $\perp$
- Γ^L, L og $\Gamma^R, \neg L$ – interpolant $\neg L$
- $\Gamma^L, \neg L$ og Γ^R, L – interpolant L
- Γ^L og $\Gamma^R, l, \neg L$ – interpolant $\top$

$$\Gamma, L, \neg L$$

Har her fire mulige oppdelinger som gir følgende interpolanter

- $\Gamma^L, L, \neg L$ og Γ^R – interpolant $\perp$
- Γ^L, L og $\Gamma^R, \neg L$ – interpolant $\neg L$
- $\Gamma^L, \neg L$ og Γ^R, L – interpolant L
- Γ^L og $\Gamma^R, l, \neg L$ – interpolant $\top$

Observer at også falsum-regelen

$$\frac{\Gamma, \perp}{\Gamma}$$

er separabel.

$$\frac{\Gamma, \neg s = s}{\Gamma}$$

Her er s en variabel. Anta at vi har oppdeling Γ^L og Γ^R. Anta at s hører med til fellesspråket. Da er interpolanten I for $\Gamma^L, \neg s = s$ og Γ^R også en interpolant for Γ^L og Γ^R. Ellers er ikke s med i en av dem – la oss si Γ^L. Velg da interpolant I for Γ^L og $\Gamma^R, \neg s = s$. Den vil ikke inneholde s og er interpolant for Γ^L og Γ^R.

Vi bruker den enkle versjonen av regelen

$$\frac{\Gamma, \neg s = t, Ls, Lt}{\Gamma, \neg s = t, Ls}$$

Her er s og t variable. Vi ser først på oppdelingene

- $\Gamma^L, \neg s = t, Ls$ og Γ^R

La oss ta den første. Vi antar interpolasjonsformel I med

$$\vdash \Gamma^L \neg s = t, Ls, Lt, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

men denne er også interpolasjonsformel for

$$\vdash \Gamma^L \neg s = t, Ls, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Den andre oppdelingen er tilsvarende

Vi bruker den enkle versjonen av regelen

$$\frac{\Gamma, \neg s = t, Ls, Lt}{\Gamma, \neg s = t, Ls}$$

Her er s og t variable. Vi ser først på oppdelingene

- $\Gamma^L, \neg s = t, Ls$ og Γ^R
- Γ^L og $\Gamma^R, \neg s = t, Ls$

La oss ta den første. Vi antar interpolasjonsformel I med

$$\vdash \Gamma^L \neg s = t, Ls, Lt, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

men denne er også interpolasjonsformel for

$$\vdash \Gamma^L \neg s = t, Ls, I \qquad \vdash \Gamma^R, \neg I$$

Den andre oppdelingen er tilsvarende

- $\Gamma^L, \neg s = t$ og Γ^R, Ls

La oss ta den første av disse to. Vi har interpolant Ist med

$$\vdash \Gamma^L, \neg s = t, Ist \qquad \vdash \Gamma^R, Ls, Lt, \neg Ist$$

Videre har vi

$$\vdash \Gamma^L, \neg s = t, s = t \qquad \vdash \Gamma^R, \neg s = t, Ls, \neg Ist$$

Som gir

$$\vdash \Gamma^L, \neg s = t, s = t \wedge Ist \qquad \vdash \Gamma^R, Ls \neg(s = t \wedge Ist)$$

Forts ...

- $\Gamma^L, \neg s = t$ og Γ^R, Ls
- Γ^L, Ls og $\Gamma^R, \neg s = t$

La oss ta den første av disse to. Vi har interpolant Ist med

$$\vdash \Gamma^L, \neg s = t, Ist \qquad \vdash \Gamma^R, Ls, Lt, \neg Ist$$

Videre har vi

$$\vdash \Gamma^L, \neg s = t, s = t \qquad \vdash \Gamma^R, \neg s = t, Ls, \neg Ist$$

Som gir

$$\vdash \Gamma^L, \neg s = t, s = t \wedge Ist \qquad \vdash \Gamma^R, Ls \neg(s = t \wedge Ist)$$

Forts ...

Forts . . .
$s = t \wedge Ist$ er en interpolant om den er med i fellesspråket i den oppdelte konklusjonen. Om ikke har vi noen tilfeller

- Verken s eller t er med i fellesspråket – interpolant I

Forts ...
$s = t \wedge Ist$ er en interpolant om den er med i fellesspråket i den oppdelte konklusjonen. Om ikke har vi noen tilfeller

- Verken s eller t er med i fellesspråket – interpolant I
- s men ikke t er med i fellesspråket – interpolant $\exists x.(s = x \wedge Isx)$

Forts . . .
$s = t \wedge Ist$ er en interpolant om den er med i fellesspråket i den oppdelte konklusjonen. Om ikke har vi noen tilfeller

- Verken s eller t er med i fellesspråket – interpolant I
- s men ikke t er med i fellesspråket – interpolant $\exists x.(s = x \wedge Isx)$
- t men ikke s er med i fellesspråket – interpolant $\exists x.(x = t \wedge Ixt)$

Forts ...
$s = t \wedge Ist$ er en interpolant om den er med i fellesspråket i den oppdelte konklusjonen. Om ikke har vi noen tilfeller

- Verken s eller t er med i fellesspråket – interpolant I
- s men ikke t er med i fellesspråket – interpolant $\exists x.(s = x \wedge Isx)$
- t men ikke s er med i fellesspråket – interpolant $\exists x.(x = t \wedge Ixt)$

Forts ...
$s = t \wedge Ist$ er en interpolant om den er med i fellesspråket i den oppdelte konklusjonen. Om ikke har vi noen tilfeller

- Verken s eller t er med i fellesspråket – interpolant I
- s men ikke t er med i fellesspråket – interpolant $\exists x.(s = x \wedge Isx)$
- t men ikke s er med i fellesspråket – interpolant $\exists x.(x = t \wedge Ixt)$

Tilsvarende argument for den siste oppdelingen

- Γ^L, Ls og $\Gamma^R, \neg s = t$

Det kan være nyttig med følgende tabell som viser hvordan interpolanten bygges opp avhengig av hvilken regel som brukes og om hovedformelen i regelen er på venstre eller høyre side i oppdelingen:

Regel	Venstre	Høyre
$\vee$	$-$	$-$
$\wedge$	$\vee$	$\wedge$
$\exists$	$\forall$	$\exists$
$\forall$	$-$	$-$