LIKHET

INF 3170 - vår 2006

Herman Ruge Jervell

LNS, Ifi, UiO

5th April 2006

- Termer: bygd opp fra variable ved bruk av funksjonssymboler

ENSIDIG SEKVENTKALKYLE

Språket

- Termer: bygd opp fra variable ved bruk av funksjonssymboler
- Likhet: binær relasjon skrevet $s = t$

ENSIDIG SEKVENTKALKYLE

Språket

- Termer: bygd opp fra variable ved bruk av funksjonssymboler
- Likhet: binær relasjon skrevet $s = t$
- Formler: bygd opp fra litteraler ved bruk av konnektiver og kvantorer

ENSIDIG SEKVENTKALKYLE

Språket

- Termer: bygd opp fra variable ved bruk av funksjonssymboler
- Likhet: binær relasjon skrevet $s = t$
- Formler: bygd opp fra litteraler ved bruk av konnektiver og kvantorer
- Negasjon: definert operasjon

ENSIDIG SEKVENTKALKYLE

Språket

- Termer: bygd opp fra variable ved bruk av funksjonssymboler
- Likhet: binær relasjon skrevet $s = t$
- Formler: bygd opp fra litteraler ved bruk av konnektiver og kvantorer
- Negasjon: definert operasjon
- Sekvent: endelig mengde av formler

- Termer: bygd opp fra variable ved bruk av funksjonssymboler
- Likhet: binær relasjon skrevet $s = t$
- Formler: bygd opp fra litteraler ved bruk av konnektiver og kvantorer
- Negasjon: definert operasjon
- Sekvent: endelig mengde av formler
- Skrivemåter: $\Gamma \qquad \Gamma, \Delta \qquad \Gamma, F, G \qquad \ldots$

- Aksiom: $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral

ENSIDIG SEKVENTKALKYLE

Kalkylen – 1

- Aksiom: $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral
- Konnektiver:

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}\ \alpha \qquad \frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}\ \beta$$

ENSIDIG SEKVENTKALKYLE

Kalkylen – 1

- Aksiom: $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral
- Konnektiver:

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}\ \alpha \qquad \frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}\ \beta$$

- Kvantorer:

$$\frac{\Gamma, \exists x.Fx, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx}\ \gamma \qquad \frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}\ \delta$$

ENSIDIG SEKVENTKALKYLE

Kalkylen – 1

- Aksiom: $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral
- Konnektiver:

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}\ \alpha \qquad \frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}\ \beta$$

- Kvantorer:

$$\frac{\Gamma, \exists x.Fx, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx}\ \gamma \qquad \frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}\ \delta$$

- Regel δ oppfyller egenvariabelbetingelse.

- Refleksivitet:

$$\frac{\Gamma, \neg s = s}{\Gamma}$$

- Refleksivitet:

$$\frac{\Gamma, \neg s = s}{\Gamma}$$

- Replacement:

$$\frac{\Gamma, \neg s = t, L, L*}{\Gamma, \neg s = t, L}$$

ENSIDIG SEKVENTKALKYLE

Kalkylen – 2

- Refleksivitet:

$$\frac{\Gamma, \neg s = s}{\Gamma}$$

- Replacement:

$$\frac{\Gamma, \neg s = t, L, L*}{\Gamma, \neg s = t, L}$$

- L og $L*$ er litteraler – $L*$ er fått fra L ved å erstatte noen s'er med t

Refleksivitet:

$$\frac{s = s, \neg s = s}{s = s}$$

Symmetri:

$$\cfrac{\cfrac{\neg s = t, s = t, t = t, \neg t = t}{\neg s = t, s = t, t = t}}{\neg s = t, s = t}$$

Transitivitet:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg s = t, \neg t = u, s = u, t = u, u = u, \neg u = u}{\neg s = t, \neg t = u, s = u, t = u, u = u}}{\neg s = t, \neg t = u, s = u, t = u}}{\neg s = t, \neg t = u, s = u}$$

LIKHET

Variant-formulering

- La Γ være en sekvent

LIKHET

Variant-formulering

- La Γ være en sekvent
- I sekventen kan det forekomme en rekke litteraler av formen $\neg s = t$

LIKHET

Variant-formulering

- La Γ være en sekvent
- I sekventen kan det forekomme en rekke litteraler av formen $\neg s = t$
- La $\sim$ være ekvivalensrelasjonen mellom termer generert fra at $s \sim t$ for alle s, t med $\neg s = t$ i sekventen Γ

LIKHET

Variant-formulering

- La Γ være en sekvent
- I sekventen kan det forekomme en rekke litteraler av formen $\neg s = t$
- La $\sim$ være ekvivalensrelasjonen mellom termer generert fra at $s \sim t$ for alle s, t med $\neg s = t$ i sekventen Γ
- Da sier vi at en litteral $L*$ er en variant av litteral L mht Γ om argumentene i L og $L*$ er ekvivalente mht $\sim$

LIKHET

Variant-formulering

- La Γ være en sekvent
- I sekventen kan det forekomme en rekke litteraler av formen $\neg s = t$
- La $\sim$ være ekvivalensrelasjonen mellom termer generert fra at $s \sim t$ for alle s, t med $\neg s = t$ i sekventen Γ
- Da sier vi at en litteral $L*$ er en variant av litteral L mht Γ om argumentene i L og $L*$ er ekvivalente mht $\sim$

LIKHET

Variant-formulering

- La Γ være en sekvent
- I sekventen kan det forekomme en rekke litteraler av formen $\neg s = t$
- La $\sim$ være ekvivalensrelasjonen mellom termer generert fra at $s \sim t$ for alle s, t med $\neg s = t$ i sekventen Γ
- Da sier vi at en litteral $L*$ er en variant av litteral L mht Γ om argumentene i L og $L*$ er ekvivalente mht $\sim$

Vi endrer så replacementregelen til:

$$\frac{\Gamma, L, L*}{\Gamma, L}$$

der L og $L*$ er varianter mht Γ. Denne regelen endrer ikke på hvilke sekventer som kan utledes, men gjør at vi ofte klarer oss med bare et trinn med den nye regelen der vi trengte flere før. Denne bruker vi i utledning av snitteliminasjon for predikatkalkyle med likhet.

- Gitt sekvent Γ vi genererer analysetreet over det

- Gitt sekvent Γ vi genererer analysetreet over det
- I vanlig predikatkalkyle passer vi på at termer blir satt inn ved γ-regel på en fair måte

- Gitt sekvent Γ vi genererer analysetreet over det
- I vanlig predikatkalkyle passer vi på at termer blir satt inn ved γ-regel på en fair måte
- I predikatkalkyle med likhet passer vi også på at alle mulige varianter av litteraler blir introdusert

- Gitt sekvent Γ vi genererer analysetreet over det
- I vanlig predikatkalkyle passer vi på at termer blir satt inn ved γ-regel på en fair måte
- I predikatkalkyle med likhet passer vi også på at alle mulige varianter av litteraler blir introdusert
- Om vi har et lukket analysetre, får vi en derivasjon av Γ

LIKHET

Kompletthet

- Gitt sekvent Γ vi genererer analysetreet over det
- I vanlig predikatkalkyle passer vi på at termer blir satt inn ved γ-regel på en fair måte
- I predikatkalkyle med likhet passer vi også på at alle mulige varianter av litteraler blir introdusert
- Om vi har et lukket analysetre, får vi en derivasjon av Γ
- Om det fins en åpen grein, så vil ekvivalensklassene av termene i greinen gi universet til en motmodell for Γ

- Gitt sekvent Γ vi genererer analysetreet over det
- I vanlig predikatkalkyle passer vi på at termer blir satt inn ved γ-regel på en fair måte
- I predikatkalkyle med likhet passer vi også på at alle mulige varianter av litteraler blir introdusert
- Om vi har et lukket analysetre, får vi en derivasjon av Γ
- Om det fins en åpen grein, så vil ekvivalensklassene av termene i greinen gi universet til en motmodell for Γ
- Kompletthet av predikatkalkyle med likhet følger

LIKHET

Snitt – 1

- Trenger å vise hovedlemmaet for litteraler

LIKHET

Snitt – 1

- Trenger å vise hovedlemmaet for litteraler
- Anta $\vdash \Gamma, L[0, h]$ og $\Gamma, \neg L[0, h]$ der L er en litteral. Vi antar L er den atomære formelen og $\neg L$ negasjonen av den.

LIKHET

Snitt – 1

- Trenger å vise hovedlemmaet for litteraler
- Anta $\vdash \Gamma, L[0, h]$ og $\Gamma, \neg L[0, h]$ der L er en litteral. Vi antar L er den atomære formelen og $\neg L$ negasjonen av den.
- Ta utgangspunkt i derivasjonen $\vdash \Gamma, L$ og stryk alle trådene av L og alle L's varianter

LIKHET

Snitt – 1

- Trenger å vise hovedlemmaet for litteraler
- Anta $\vdash \Gamma, L[0, h]$ og $\Gamma, \neg L[0, h]$ der L er en litteral. Vi antar L er den atomære formelen og $\neg L$ negasjonen av den.
- Ta utgangspunkt i derivasjonen $\vdash \Gamma, L$ og stryk alle trådene av L og alle L's varianter
- Siden L ikke er av formen $\neg s = t$ får vi ikke noe problem med likhetsreglene. Det eneste problem er der en tråd ender opp i et aksiom $\Delta, L*, \neg L*$ der $L*$ hører med til en tråd som blir strøket og vi får $\Delta, \neg L*$.

- Trenger å vise hovedlemmaet for litteraler
- Anta $\vdash \Gamma, L[0,h]$ og $\Gamma, \neg L[0,h]$ der L er en litteral. Vi antar L er den atomære formelen og $\neg L$ negasjonen av den.
- Ta utgangspunkt i derivasjonen $\vdash \Gamma, L$ og stryk alle trådene av L og alle L's varianter
- Siden L ikke er av formen $\neg s = t$ får vi ikke noe problem med likhetsreglene. Det eneste problem er der en tråd ender opp i et aksiom $\Delta, L*, \neg L*$ der $L*$ hører med til en tråd som blir strøket og vi får $\Delta, \neg L*$.
- Nå er L og $L*$ varianter mht Δ og vi kan bruke replacement for å få $\Delta, \neg L, \neg L*$ og vi kan bruke antagelsen $\vdash \Gamma, \neg L[0,h]$ sammen med tynning.

- Trenger å vise hovedlemmaet for litteraler
- Anta $\vdash \Gamma, L[0,h]$ og $\Gamma, \neg L[0,h]$ der L er en litteral. Vi antar L er den atomære formelen og $\neg L$ negasjonen av den.
- Ta utgangspunkt i derivasjonen $\vdash \Gamma, L$ og stryk alle trådene av L og alle L's varianter
- Siden L ikke er av formen $\neg s = t$ får vi ikke noe problem med likhetsreglene. Det eneste problem er der en tråd ender opp i et aksiom $\Delta, L*, \neg L*$ der $L*$ hører med til en tråd som blir strøket og vi får $\Delta, \neg L*$.
- Nå er L og $L*$ varianter mht Δ og vi kan bruke replacement for å få $\Delta, \neg L, \neg L*$ og vi kan bruke antagelsen $\vdash \Gamma, \neg L[0,h]$ sammen med tynning.
- Dette gir $\vdash \Gamma[0,2h]$

- Trenger å vise hovedlemmaet for litteraler
- Anta $\vdash \Gamma, L[0, h]$ og $\Gamma, \neg L[0, h]$ der L er en litteral. Vi antar L er den atomære formelen og $\neg L$ negasjonen av den.
- Ta utgangspunkt i derivasjonen $\vdash \Gamma, L$ og stryk alle trådene av L og alle L's varianter
- Siden L ikke er av formen $\neg s = t$ får vi ikke noe problem med likhetsreglene. Det eneste problem er der en tråd ender opp i et aksiom $\Delta, L*, \neg L*$ der $L*$ hører med til en tråd som blir strøket og vi får $\Delta, \neg L*$.
- Nå er L og $L*$ varianter mht Δ og vi kan bruke replacement for å få $\Delta, \neg L, \neg L*$ og vi kan bruke antagelsen $\vdash \Gamma, \neg L[0, h]$ sammen med tynning.
- Dette gir $\vdash \Gamma[0, 2h]$
- Vi må bruke replacement en gang ekstra når vi har strøket den ut minst en gang i tråden under

Vi har da for predikatkalkyle med likhet

Theorem

$$\vdash \Gamma[g,h] \quad \Rightarrow \quad \vdash \Gamma[g-1,2^h] \quad \Rightarrow \quad \vdash \Gamma[0,2^h_g]$$

Her er predikatkalkyle med likhet formulert med variant-formuleringen av replacement. Med den andre formuleringen måtte vi endre litt på estimatene.