

OPPGAVER OM SNITT - INF 3170

Vi skal se på snittregelen og eliminering av den.

Vi har utsagnslogisk sekventkalkyle med snittregel

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \Delta, F}{\Gamma \vdash \Delta}$$

F kalles snittformelen.

I en utledning har vi to mål

- Høyden h på utledning
- Snittgrad – største lengde av en snittformel i utledningen

Vi skriver $\mathbf{D} : \Gamma \vdash \Delta [h,s]$ for at \mathbf{D} er en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ med høyde $\leq h$ og snittgrad $\leq g$

I behandlingen av snitt ser vi på transformasjoner av utledninger og spesielt hvordan høyde og snittgrad endres.

Oppgave 1

Vis at følgende transformasjoner kan gjøres uten å øke verken høyde eller snittgrad

- Fra $\mathbf{D} : \Gamma \vdash \Delta [h,s]$ til $\mathbf{E} : \Gamma \vdash \Delta, K [h,s]$
- Fra $\mathbf{D} : \Gamma \vdash \Delta, \neg F [h,s]$ til $\mathbf{E} : \Gamma, F \vdash \Delta [h,s]$
- Fra $\mathbf{D} : \Gamma \vdash \Delta, F \wedge G [h,s]$ til $\mathbf{E} : \Gamma \vdash \Delta, F [h,s]$
- Fra $\mathbf{D} : \Gamma \vdash \Delta, F \wedge G [h,s]$ til $\mathbf{E} : \Gamma \vdash \Delta, G [h,s]$
- Fra $\mathbf{D} : \Gamma \vdash \Delta, F \vee G [h,s]$ til $\mathbf{E} : \Gamma \vdash \Delta, F, G [h,s]$
- Tilsvarende transformasjoner for formler i antesedent

Oppgave 2

Vis at vi kan bli kvitt et enkelt snitt ved å transformere til en utledning som har høyde $\leq h+1$. Om dette snitt er så langt oppe i utledningen at det ikke har snitt med større snittgrad over seg, så vil snittgraden ikke bli økt i den transformerte utledningen.

Oppgave 3

Vis at vi kan bli kvitt alle snitt av maksimal snittgrad og får utledning med høyde $\leq 2h$

Oppgave 4

Gitt en utledning $\mathbf{D} : \Gamma \vdash \Delta [h,s]$. Den kan transformeres til en utledning $\mathbf{E} : \Gamma \vdash \Delta [2^h, 0]$.