Løsningsforslag inf3170 våren 2006, ukesoppgavesett 1, oppgave 4

Martin G. Skjæveland

2. februar 2006

Oppgave 4

Oppgave: Finn ut hvorvidt relasjonene nedenfor har egenskapene *refleksiv*, *symmetrisk* eller *transitiv*.
Løsningsforslag: A er en ikke-tom mengde og $\mathcal{P}(A)$ er potensmengden til A. $\mathcal{P}(S)$ kan vi definere som

$$x \in \mathcal{P}(S) \text{ hviss } x \subseteq S$$

$\mathcal{P}(S)$ er altså en mengde som inneholder alle delmengdene av S. *hviss* er en forkortelse av *hvis og bare hvis*. Potensmengde heter *powerset* på engelsk.

a. Delmengde-relasjonen $\subseteq$ på $\mathcal{P}(A)$: $\langle X, Y\rangle \in \subseteq \Leftrightarrow X \subseteq Y$. Vi definerer delmengde-relasjonen $\subseteq$ som

$$S \subseteq T \text{ hviss } x \in S \Rightarrow x \in T \text{ for alle } x \in S$$

dvs. alle elementer i S er også element i T.

- Refleksiv? Ja.

$$\begin{aligned} \langle X, X\rangle &\Leftrightarrow X \subseteq X \\ &\Leftrightarrow x \in X \Rightarrow x \in X \text{ for alle } x \in X \end{aligned}$$

- Symmetrisk? Nei. For å motbevise noe holder det at man finnet ett moteksempel. **NB!** Skal man bevise noe holder det *ikke* at man viser et eksempel hvor det man skal bevise holder. Man må da vise at det holder for alle mulige tilfeller og dette krever svært ofte sterkere lut enn å kun vise et eksempel.
  Moteksempel. Anta $A = \{a\}$. Da er $\mathcal{P}(A) = \{a, \emptyset\}$. $\emptyset \subseteq \{a\}$ holder, men $\{a\} \subseteq \emptyset$ holder ikke. Det er dermed ikke tilfelle at $\subseteq$ er symmetrisk ettersom $\langle X, Y\rangle \in \subseteq$ ikke impliserer at $\langle Y, X\rangle \in \subseteq$.

- Transitiv: $\langle X, Y\rangle \in \subseteq$ og $\langle Y, Z\rangle \in \subseteq$ impliserer$\langle X, Z\rangle \in \subseteq$? Ja. Bevis ved selvmotsigelse: dvs. vi antar $\langle X, Y\rangle \in \subseteq$, $\langle Y, Z\rangle \in \subseteq$ og at det *ikke* er tilfelle at $\langle X, Z\rangle \in \subseteq$, for alle X, Y, Z. Hvis det viser seg at vi med disse antakelsene kan regne oss frem til en selvmotsigelse har vi bevist at implikasjonen, $\langle X, Y\rangle \in \subseteq$ og $\langle Y, Z\rangle \in \subseteq$ impliserer $\langle X, Z\rangle \in \subseteq$ holder. (Sjekk sannhetsverditabellen for $\rightarrow$.)

$$
\begin{array}{lcll}
X \subseteq Y & \Leftrightarrow & x \in X \Rightarrow x \in Y \text{ for alle } x \in X & (\text{def} \subseteq) \quad (1) \\
Y \subseteq Z & \Leftrightarrow & x \in Y \Rightarrow x \in Z \text{ for alle } x \in Y & (\text{def} \subseteq) \quad (2) \\
X \nsubseteq Z & \Leftrightarrow & x \in X \Rightarrow x \notin Z \text{ for en } x \in X & (\text{def} \subseteq) \quad (3)
\end{array}
$$

  La s være et elementet i X, som ikke er element i Z. Ettersom $X \subseteq Y$, så må s være element i Y av linje (1). Og ettersom $Y \subseteq Z$, så må s være element i Z av linje (2), men av antagelse er s ikke et element i Z! Selvmotsigelse.

b. Ulikhets-relasjonen $\neq$ på $\mathcal{P}(A)$: $\langle X, Y\rangle \in \neq \Leftrightarrow X \neq Y$. To mengder er ulike hvis de ikke inneholder de samme elementene. Resultatene her er enkle, så vi "beviser" vha. noen enkle argumenter.

- Refleksiv? Nei. $\langle X, X\rangle \notin \neq$ for alle mengde X. "En mengde kan ikke inneholde et element som ikke er i mengden" eller "Ingen mengde kan være ulik seg selv". Dette betyr at relasjonen er *irrefeksiv*; $\langle X, X\rangle \in \neq$ holder ikke for noen mengde X.
- Symmetrisk? Ja. $\langle X, Y\rangle \in \neq \Rightarrow \langle Y, X\rangle \in \neq$. "Er X ulik Y, så er Y ulik X."
- Transitiv? Nei. Faktisk er det slik at en irrefleksiv og symmetrisk relasjon ikke kan være transitiv: Anta at en ikke-tom relasjon R er irrefleksiv, symmetrisk og transitiv. Hvis $\langle X, Y\rangle \in R$, så, ved symmetri, er $\langle Y, X\rangle \in R$. Ved transitivitet må $\langle X, X\rangle \in R$, men dette motsier faktumet at relasjonen er irrefleksiv.

c. Relativ kompliment-relasjonen K på $\mathcal{P}(A)$: $\langle X, Y\rangle \in K \Leftrightarrow Y = A \setminus X$. Dette kan sies på en litt mer intuitiv måte, $\langle X, Y\rangle \in K \Leftrightarrow A = X \cup Y$, ved følgende argument:

$$
\begin{array}{rcll}
Y & = & A \setminus X & \\
Y & = & A \cap \sim X & (\text{def. } \cap) \\
Y \cup X & = & (A \cap \sim X) \cup X & \\
Y \cup X & = & (A \cup X) \cap (\sim X \cup X) & (\text{distributiv lov}) \\
Y \cup X & = & (A \cup X) & (X \cup \sim X = U \text{ (universet)}) \\
Y \cup X & = & A & (X \subseteq A)
\end{array}
$$

- Refleksiv? Nei. Moteksempel. La A være som i moteksempelet over. Det er ikke slik at $\langle \emptyset, \emptyset \rangle \in K$ siden $\emptyset \cup \emptyset \neq A$. Relasjonen er faktisk irrefleksiv.
- Symmetrisk? Ja. Hvis $X \cup Y = A$, så må $Y \cup X = A$.
- Transitiv. Nei. Ettersom relasjonen er irrefleksiv og symmetrisk, kan den ikke være transitiv.