INF3170 – Logikk

Obligatorisk oppgave 3 - løsningsforslag til noen av oppgavene

Oppgave 2 La $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi$ være en lukket førsteordens formel. Utvid språket med et funksjonssymbol f med aritet n og se på formelen $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$. Vis at

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi \text{ er oppfyllbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y] \text{ er oppfyllbar.}$$

Løsningsforslag til oppgave 2

Først noen kommentarer:

- For å vise en 'hvis og bare hvis'-påstand, så må man vise at høyresiden impliserer venstresiden ($\Leftarrow$) og at venstresiden impliserer høyresiden ($\Rightarrow$).
- Poenget med at språket utvides, la oss si fra $\mathcal{L}$ til $\mathcal{L}'$, er at funksjonssymbolet f ikke skal kunne forekomme i den første formelen. Vi antar at modellene som oppfyller formlene er $\mathcal{L}'$-modeller.
- Husk Lemmaet fra forelesning 8:
  La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

Kortversjonen: ($\Rightarrow$) Anta at $\mathcal{M}$ oppfyller $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi$. Da har vi for hvert valg av verdier for $x_1, \ldots, x_n$ et valg av verdi for y slik at ψ er sann. La $\mathcal{N}$ være en modell som er helt lik $\mathcal{M}$, men som tolker f som en funksjon som plukker ut en slik verdi for y for hvert valg av verdier for $x_1, \ldots, x_n$. Da vil modellen $\mathcal{N}$ oppfylle $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$. ($\Leftarrow$) Anta at $\mathcal{M}$ oppfyller $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$. Da har vi for hvert valg av verdier for $x_1, \ldots, x_n$ at formelen $\psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$ er sann i $\mathcal{M}$. Da er også formelen $\exists y \psi$ sann i $\mathcal{M}$ for hvert valg av verdier for $x_1, \ldots, x_n$. Da oppfyller $\mathcal{M}$ formelen $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi$.

Langversjonen:

($\Rightarrow$) Anta at $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi$ er oppfyllbar. MÅL: at $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$ er oppfyllbar. La $\mathcal{M}$ være en modell slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi.$$

For alle $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ så holder (ved definisjonen av oppfyllbarhet)

$$\mathcal{M} \models \exists y \psi[\bar{a}_1/x_1, \ldots, \bar{a}_n/x_n].$$

For alle $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ så fins et element $e \in |\mathcal{M}|$ (ved definisjonen av oppfyllbarhet) slik at

$$\mathcal{M} \models \psi[\bar{e}/y, \bar{a}_1/x_1, \ldots, \bar{a}_n/x_n].$$

La f' være funksjonen fra $|\mathcal{M}|^n$ til $|\mathcal{M}|$ som til n elementer $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ tilordner et element $e \in |\mathcal{M}|$ med egenskapen over, dvs. $f'(a_1, \ldots, a_n) = e$. La $\mathcal{N}$ være modellen som er identisk med $\mathcal{M}$ bortsett fra med hensyn på tolkningen av funksjonssymbolet f: vi krever at $f^{\mathcal{N}} = f'$. Det gjenstår å vise at

$$\mathcal{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y].$$

(MERK: vi kan *ikke* bruke $\mathcal{M}$ til dette; se eksempel fra Forelesning 8.) Det er tilstrekkelig å vise (ved definisjonen av oppfyllbarhet) at for alle $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{N}|$ så holder

$$\mathcal{N} \models \psi[f(\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_n})/y, \bar{a_1}/x_1, \ldots, \bar{a_n}/x_n].$$

Ved konstruksjonen av f' så tolkes $f(\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_n})$ som et element e slik at

$$\mathcal{M} \models \psi[\bar{e}/y, \bar{a_1}/x_1, \ldots, \bar{a_n}/x_n].$$

Denne formelen inneholder ikke f, så vi har at

$$\mathcal{N} \models \psi[\bar{e}/y, \bar{a_1}/x_1, \ldots, \bar{a_n}/x_n].$$

Det betyr at $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$ er oppfyllbar.

($\Leftarrow$) Anta at $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$ er oppfyllbar. MÅL: at $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi$ er oppfyllbar. La $\mathcal{M}$ være en modell slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y].$$

For alle $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ så holder (ved definisjonen av oppfyllbarhet)

$$\mathcal{M} \models \psi[f(\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_n})/y, \bar{a_1}/x_1, \ldots, \bar{a_n}/x_n].$$

For alle $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ så fins det et element $e \in |\mathcal{M}|$ slik at

$$\mathcal{M} \models \psi[\bar{e}/y, \bar{a_1}/x_1, \ldots, \bar{a_n}/x_n],$$

siden vi kan la $e = f(\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_n})^{\mathcal{M}}$. Da har vi at for alle $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ så holder

$$\mathcal{M} \models \exists y \psi[\bar{a_1}/x_1, \ldots, \bar{a_n}/x_n].$$

Da har vi at

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi$$

og vi har vist at formelen er oppfyllbar.

Oppgave 3 Vis at for enhver lukket førsteordens formel φ så fins det en formel φ' på Skolem normalform som er oppfyllbar hvis og bare hvis φ er oppfyllbar.

Løsningsforslag til oppgave 3

La φ være en lukket førsteordens formel. Overfør φ til en formel φ_n på preneks normalform. Denne overføringen bevarer ekvivalens, så φ er oppfyllbar hvis og bare hvis φ_n er oppfyllbar (bevaring av ekvivalens er en sterkere egenskap enn bevaring av oppfyllbarhet). For å få en formel på Skolem normalform er vi nødt til å fjerne alle eksistenskvantorene som forekommer i φ_n. Vi viser ved induksjon på antall eksistenskvantorer at vi får en formel på Skolem normalform φ_0 som er oppfyllbar hvis og bare hvis φ_n er oppfyllbar. Anta at antall eksistenskvantorer er n. Hvis $n = 0$, så er formelen allerede på Skolem normalform, og vi er trenger ikke å bevise noe mer. Hvis $n > 0$, så er φ_n på formen $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \psi$. Oppgave 2 forteller oss at denne formelen er oppfyllbar hvis og bare hvis $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$ er oppfyllbar, hvor f er et nytt funksjonssymbol. Kall denne formelen φ_{n-1}. Siden φ_{n-1} er på preneks normalform og inneholder kun $n-1$ eksistenskvantorer, så kan vi bruke induksjonshypotesen. Da får vi en formel φ_0 på Skolem normalform som er oppfyllbar hvis og bare hvis φ_{n-1} er oppfylbar. Det følger at φ_n er oppfyllbar hvis og bare hvis φ_0 er oppfyllbar.

Oppgave 5 Vi utvider LK med følgende to regler.

$$\dfrac{\times}{\Gamma \vdash t \doteq t, \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma', s \doteq t \vdash \Delta'}{\Gamma, s \doteq t \vdash \Delta}$$

der s og t er vilkårlige termer og der Γ' og Δ' fremkommer fra Γ og Δ ved å erstatte et vilkårlig antall forekomster av s med t. Det er nå altså lov å lukke en løvsekvent hvis $t \doteq t$ forekommer i succedenten.

Vis at den nye kalkylen er sunn.

Løsningsforslag til oppgave 5

Her er det underforstått at s og t er *lukkede* termer. (Tenk over det. Hvis vi tillater frie variable, så er ikke substitusjonsregelen sunn lenger. På den annen side: i grunn LK er alle formlene lukkede når rotsekventen kun består av lukkede formler.) Den nye kalkylen er sunn hvis de nye reglene bevarer gyldighet nedover (alternativt: bevarer falsifiserbarhet oppover).

- Vi må først vise at $\Gamma \vdash t \doteq t, \Delta$ er gyldig. Det holder siden $t \doteq t$ er sann i enhver modell. (Enhver modell som oppfyller Γ må gjøre minst én formel i succendent sann. I dette tilfellet kan $t \doteq t$ alltid brukes.)
- Anta at konklusjonen er falsifiserbar. Da fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne. I tillegg må $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Ved Lemmaet fra forelesning 8 har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$, for alle formler φ. Det følger at $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ' sanne og alle formlene i Δ' usanne.

Bevis for Lemmaet. La $\mathcal{M}$ være en modell. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Vi viser først ved induksjon på oppbyggingen av termer at hvis a er en term med høyst x fri, så holder $a[s/x]^{\mathcal{M}} = a[t/x]^{\mathcal{M}}$.

- Basistilfellet. Anta at a er et konstantsymbol eller en variabel.
  - Hvis a er et konstantsymbol, så vil $a = a[s/x] = a[t/x]$, så $a[s/x]^{\mathcal{M}} = a[t/x]^{\mathcal{M}}$ holder trivielt.
  - Hvis a er en variabel, så er $a = x$. Da vil $a[s/x] = s$ og $a[t/x] = t$. Siden $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$ har vi at $a[s/x]^{\mathcal{M}} = s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}} = a[t/x]^{\mathcal{M}}$.
- Induksjonssteget. Anta at a er på formen $f(t_1, \ldots, t_n)$. Induksjonshypotesen gir at $t_i[s/x]^{\mathcal{M}} = t_i[t/x]^{\mathcal{M}}$. Vi får

$$\begin{aligned} a[s/x]^{\mathcal{M}} &= f(t_1[s/x], \ldots, t_n[s/x])^{\mathcal{M}} \\ &= f^{\mathcal{M}}(t_1[s/x]^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n[s/x]^{\mathcal{M}}) \\ &= f^{\mathcal{M}}(t_1[t/x]^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n[t/x]^{\mathcal{M}}) \\ &= a[t/x]^{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Vi viser deretter ved induksjon på oppbyggingen av formler (i et utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$) at hvis φ er en formel med høyst x fri, så holder $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Basistilfellet. Anta at φ er atomær. Da vil φ være på formen $R(t_1, \ldots, t_n)$ for et relasjonssymbol R. Vi får at $\varphi[s/x] = R(t_1, \ldots, t_n)[s/x] = R(t_1[s/x], \ldots, t_n[s/x])$ og at $\varphi[t/x] = R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$. Siden $t_i[s/x]^{\mathcal{M}} = t_i[t/x]^{\mathcal{M}}$ ved forrige induksjon, så har vi at $\varphi[s/x]$ og $\varphi[t/x]$ tolkes likt i $\mathcal{M}$.

- Induksjonssteget. Vi viser et av tilfellene. Anta at φ er på formen $\exists y \psi$. Hvis $x = y$, så vil $\varphi[s/x] = \varphi = \varphi[t/x]$ og påstanden holder. Anta at $x \neq y$. Vi får

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \varphi[s/x] \quad &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models (\exists y \psi)[s/x] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \exists y (\psi[s/x]) \\
&\Leftrightarrow \text{det fins en } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \psi[\bar{e}/y, s/x] \\
&\Leftrightarrow \text{det fins en } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \psi[\bar{e}/y, t/x] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \exists y (\psi[t/x]) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models (\exists y \psi)[t/x] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[t/x].
\end{aligned}$$

  Siden $\psi[\bar{e}/y]$ har høyst x fri, så kan vi anvende induksjonshypotesen, som gir at $\mathcal{M} \models \psi[\bar{e}/y, s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \psi[\bar{e}/y, t/x]$.