INF3170 – Logikk

Forelesning 5: Kompletthet og første-ordens logikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

20. februar 2006

Dagens plan

1. Kompletthet
2. Førsteordens logikk

Repetisjon

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Repetisjon

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P} \qquad \overset{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Repetisjon

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Repetisjon

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \qquad \dfrac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \to Q \vdash \neg Q}$$

Introduksjon til kompletthet

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er* *sunn* *hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Introduksjon til kompletthet

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK*-bevisbar.*

Introduksjon til kompletthet

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK*-bevisbar.*

Gyldighet
(semantisk)
Universell påstand:
"for alle valuasjoner..."

Introduksjon til kompletthet

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK*-bevisbar.*

Gyldighet
(semantisk)
Universell påstand:
"for alle valuasjoner. . ."

Bevisbarhet
(syntaktisk)
Eksistensiell påstand:
"det fins et bevis. . ."

Introduksjon til kompletthet

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK*-bevisbar.*

$$\xleftarrow{\text{sunnhet}}$$

Gyldighet
(semantisk)
Universell påstand:
"for alle valuasjoner. . ."

Bevisbarhet
(syntaktisk)
Eksistensiell påstand:
"det fins et bevis. . ."

Introduksjon til kompletthet

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK*-bevisbar.*

	sunnhet $\longleftarrow$	
Gyldighet (semantisk) Universell påstand: "for alle valuasjoner. . ."		**Bevisbarhet** (syntaktisk) Eksistensiell påstand: "det fins et bevis. . ."
	kompletthet $\longrightarrow$	

Introduksjon til kompletthet

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

Introduksjon til kompletthet

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.

Introduksjon til kompletthet

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.

Introduksjon til kompletthet

Sunnhet:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.

Introduksjon til kompletthet

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.

Introduksjon til kompletthet

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.

Introduksjon til kompletthet

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

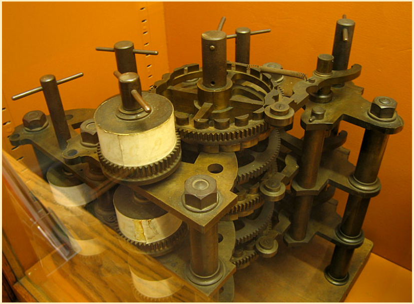
Introduksjon til kompletthet

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

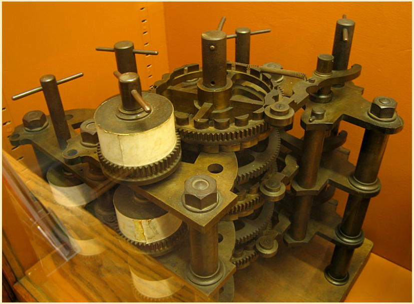
- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar

En LK-maskin?



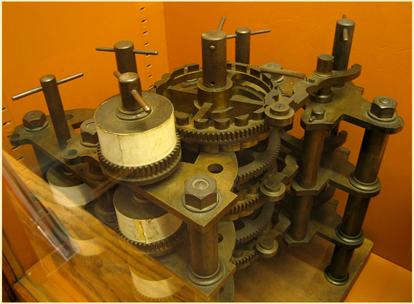
En LK-maskin?



Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

En LK-maskin?



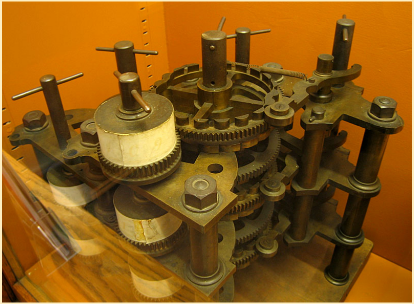
Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

En LK-maskin?



- Noe kan være sunt uten å være komplett.

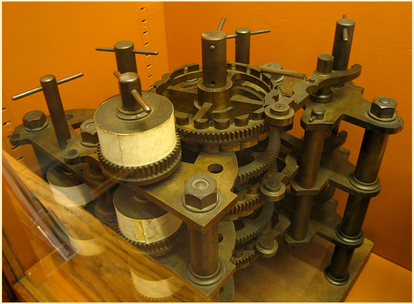
Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

En LK-maskin?



Sunnhet

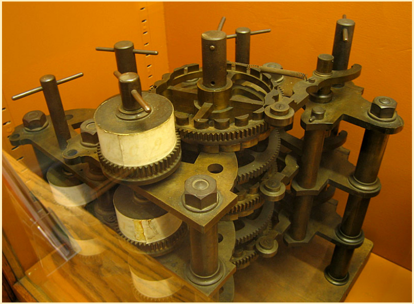
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.

En LK-maskin?



Sunnhet

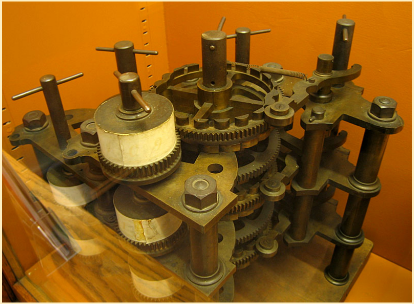
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, ...

En LK-maskin?



Sunnhet

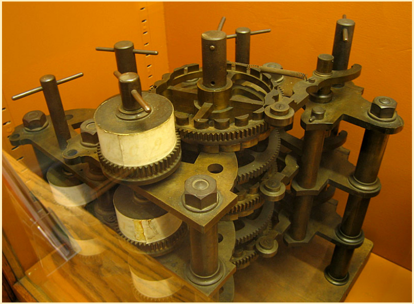
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, . . .
- Noe kan være komplett uten å være sunt.

En LK-maskin?



Sunnhet

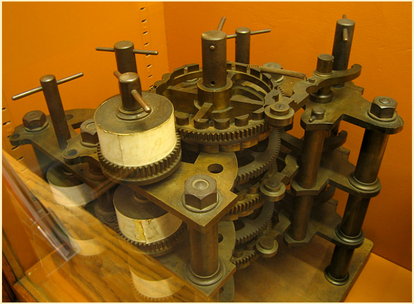
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, . . .
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.

En LK-maskin?



- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ...

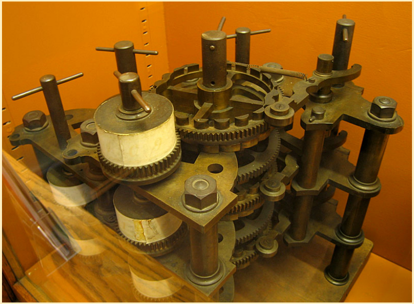
Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

En LK-maskin?



Sunnhet

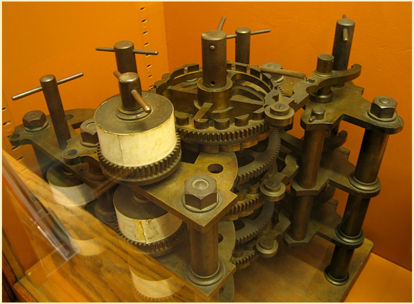
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2,   5, 7, 11,   17, 19, . . .
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . .
- Vi ønsker begge deler

En LK-maskin?



Sunnhet

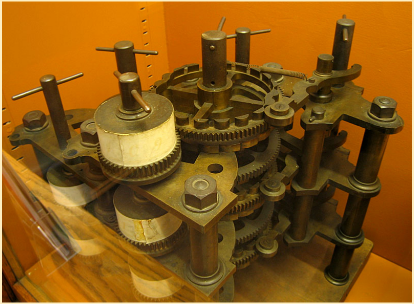
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ...
- Vi ønsker begge deler
  - Hverken for mye eller for lite.

En LK-maskin?



Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, . . .
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . .
- Vi ønsker begge deler
  - Hverken for mye eller for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 . . .

Kompletthet av LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

Kompletthet av LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Kompletthet av LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Eksistens av valuasjon)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar*

Kompletthet av LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Eksistens av valuasjon)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar*

Dvs. det finnes en valuasjon som gjør samtlige formler i Γ sanne og samtlige formler i Δ usanne.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

  $G^\top$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G, og

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

  $G^{\top}$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G, og

  $G^{\perp}$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

  $G^\top$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G, og

  $G^\perp$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

  v være valuasjonen som gjør alle alle atomære formler i $G^\top$ sanne og alle andre atomære formler (spesielt de i $G^\perp$) usanne.

Eksempel

$$P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q$$

Eksempel

$$\frac{P \to Q, P \lor R \vdash Q}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \lor R) \rightarrow Q}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash Q, P \qquad Q, P \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad Q, R \vdash Q}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}$$

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}
$$

Eksempel

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \cfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}
$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$G^{\top} = \{R, P \to Q, P \lor R\}$$

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}
$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$
G^{\top} = \{R, P \to Q, P \lor R\}
$$

$$
G^{\perp} = \{Q, P, (P \lor R) \to Q\}
$$

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \lor R) \rightarrow Q}
$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$
\begin{aligned}
G^{\top} &= \{R, P \rightarrow Q, P \lor R\} \\
G^{\perp} &= \{Q, P, (P \lor R) \rightarrow Q\} \\
v &= \text{valuasjonen definert ved } v(R) = 1 \text{ og } v(Q) = v(P) = 0
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}
$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$
\begin{aligned}
G^{\top} &= \{R, P \to Q, P \lor R\} \\
G^{\perp} &= \{Q, P, (P \lor R) \to Q\} \\
v &= \text{valuasjonen definert ved } v(R) = 1 \text{ og } v(Q) = v(P) = 0 \\
& \text{Denne valuasjonen falsifiserer rotsekventen.}
\end{aligned}
$$

Bevis for kompletthet av LK

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.

Bevis for kompletthet av LK

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

Bevis for kompletthet av LK

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.

Bevis for kompletthet av LK

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^{\top}$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^{\perp}$, så $v(A) = 0$.

Bevis for kompletthet av LK

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^{\top}$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^{\perp}$, så $v(A) = 0$.

Basissteg 1: A er en atomær formel i $G^{\top}/G^{\perp}$.

Bevis for kompletthet av LK

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^{\top}$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^{\perp}$, så $v(A) = 0$.

Basissteg 1: A er en atomær formel i $G^{\top}/G^{\perp}$.

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte $G^{\top}/G^{\perp}$.

Bevis for kompletthet av LK

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^\perp$, så $v(A) = 0$.

Basissteg 1: A er en atomær formel i $G^\top/G^\perp$.

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte $G^\top/G^\perp$.

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstanden holder for A og B, så må vi vise at den holder for $\neg A$, $(A \land B)$, $(A \lor B)$ og $(A \to B)$. Dette gir fire forskjellige tilfeller. (Vi viser tre av dem her.)

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^{\perp}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 0$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\top}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \wedge B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \land B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \wedge B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \land B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \land B) = 1$.

Anta at $(A \land B) \in G^\perp$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\perp}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \wedge B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 0$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \wedge B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 0$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \to B) \in G^{\top}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \to B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 1$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \to B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 1$.

Anta at $(A \to B) \in G^\perp$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 1$.

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\perp}$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 1$.

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 0$.

Bevis for kompletthet av LK

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 1$.

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \rightarrow B) = 0$.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P^i_j være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P_j^i være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P_j^i være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
    - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P_1^1 \lor P_2^1$.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P_j^i være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
  - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P_1^1 \vee P_2^1$.
  - Objekt 3 ligger i en av boksene: $P_1^3 \vee P_2^3$.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P_j^i være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
  - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P_1^1 \lor P_2^1$.
  - Objekt 3 ligger i en av boksene: $P_1^3 \lor P_2^3$.
  - Boks 1 inneholder både objekt 1 og 2: $P_1^1 \land P_1^2$.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P_j^i være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
    - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P_1^1 \lor P_2^1$.
    - Objekt 3 ligger i en av boksene: $P_1^3 \lor P_2^3$.
    - Boks 1 inneholder både objekt 1 og 2: $P_1^1 \land P_1^2$.
    - Boks 2 inneholder både objekt 1 og 3: $P_2^1 \land P_2^3$.

Avgjørbarhet av utsagnslogikk

Teorem

Utsagnslogikk er avgjørbart, dvs. det fins en algoritme som er i stand til etter endelig mange steg å avgjøre hvorvidt en utsagnslogisk formel er gyldig eller ikke.

Avgjørbarhet av utsagnslogikk

Teorem

Utsagnslogikk er avgjørbart, dvs. det fins en algoritme som er i stand til etter endelig mange steg å avgjøre hvorvidt en utsagnslogisk formel er gyldig eller ikke.

- Vår sekventkalkyle gir opphav til en slik algoritme.

Kompleksitet av utsagnslogikk

Teorem

Oppfyllbarhetsproblemet for utsagnslogikk - å finne ut hvorvidt en formel/sekvent er oppfyllbar eller ikke - er NP-komplett. (Avgjørbart i ikke-deterministisk polynomiell tid.)

Kompleksitet av utsagnslogikk

Teorem

Oppfyllbarhetsproblemet for utsagnslogikk - å finne ut hvorvidt en formel/sekvent er oppfyllbar eller ikke - er NP-komplett. (Avgjørbart i ikke-deterministisk polynomiell tid.)

Teorem

Gyldighetsproblemet for utsagnslogikk er coNP-komplett.

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
- Førsteordens logikk er ikke avgjørbart.

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."
- "Hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c, så er a mindre enn c."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- “Alle Ifi-studenter er late.”
- “Ingen Ifi-studenter er late.”
- “Noen Ifi-studenter er late.”
- “Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen.”
- “Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen.”
- “Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat.”
- “Alle bevisbare formler er gyldige.”
- “Det fins to sheriffer i byen.”

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Overblikk

Syntaks:	førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.
Semantikk:	tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.
Kalkyle:	tillegg av regler.
Sunnhet:	alle bevisbare sekventer er gyldige.

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Sunnhet: alle bevisbare sekventer er gyldige.

Kompletthet: alle gyldige sekventer er bevisbare.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*
- *Kvantorene* $\exists$ *(det fins) og* $\forall$ *(for alle).*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*
- *Kvantorene* $\exists$ *(det fins) og* $\forall$ *(for alle).*
- *En tellbart uendelig mengde* $\mathcal{V}$ *av variable* $x_1, x_2, x_3, \ldots$
  (vi skriver x, y, z, $\ldots$, *for variable).*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av relasjonssymboler* $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av relasjonssymboler* $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt ariteten til symbolet.

Syntaks

Merk

Syntaks

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Syntaks

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

Syntaks

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

- *De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.*

Syntaks

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

- *De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.*
- *En signatur angis ved et tuppel* $\langle c_1, c_2, c_3, \ldots; f_1, f_2, f_3, \ldots; R_1, R_2, R_3, \ldots \rangle$, *hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.*

Syntaks

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av *første-ordens termer* *er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

Syntaks

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av *første-ordens termer* *er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

- *Enhver variabel og konstant er en term.*

Syntaks

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av *førsteordens termer* *er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

- *Enhver variabel og konstant er en term.*
- *Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.*

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, ..., $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, ...

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, $\ldots$, $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, $\ldots$
- $g(a, a)$, $g(a, x)$, $g(a, y)$, $g(x, x)$, $g(x, y)$, $g(y, y)$, $\ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, $\ldots$, $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, $\ldots$
- $g(a, a)$, $g(a, x)$, $g(a, y)$, $g(x, x)$, $g(x, y)$, $g(y, y)$, $\ldots$
- $f(f(a))$, $f(f(x))$, $f(f(y))$, $\ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a, x, y, \dots, f(a), f(x), f(y), \dots$
- $g(a,a), g(a,x), g(a,y), g(x,x), g(x,y), g(y,y), \dots$
- $f(f(a)), f(f(x)), f(f(y)), \dots$

Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive $fa, fx, fy, gaa, gax, \dots$.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $= (\mathrm{x}, \mathrm{x}), ++, +0, \ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $= (\mathrm{x}, \mathrm{x}), ++, +0, \ldots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $= (\mathrm{x}, \mathrm{x}), ++, +0, \ldots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.
- Vi bruker også infiks notasjon og skriver: $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \ldots$.

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $\in$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \mathrm{Ola}, \mathrm{Kari}; \mathrm{mor}, \mathrm{far}; \mathrm{Mor}, \mathrm{Far}, \mathrm{Slektning}\rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \text{Ola}, \text{Kari}; \text{mor}, \text{far}; \text{Mor}, \text{Far}, \text{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \text{Ola}, \text{Kari}; \text{mor}, \text{far}; \text{Mor}, \text{Far}, \text{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle$Ola, Kari; mor, far; Mor, Far, Slektning$\rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.
- mor(Ola), mor(Kari), far(Ola) og far(Kari) er termer.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle$Ola, Kari; mor, far; Mor, Far, Slektning$\rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.
- mor(Ola), mor(Kari), far(Ola) og far(Kari) er termer.
- mor(x) og far(x) er termer.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle$Ola, Kari; mor, far; Mor, Far, Slektning$\rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.
- mor(Ola), mor(Kari), far(Ola) og far(Kari) er termer.
- mor(x) og far(x) er termer.
- mor(mor(x)) og mor(far(Kari)) er termer.

Syntaks

Definisjon (Atomær formel - førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Syntaks

Definisjon (Atomær formel - førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

Syntaks

Definisjon (Atomær formel - førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \dots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \dots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- *Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.*

Syntaks

Definisjon (Atomær formel - førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- *Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.*
- *Så lenge det er entydig og ariteten er kjent skriver vi Rx, Rfa, $Rafa$, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. *Alle atomære formler er formler.*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av *førsteordens formler* *er den minste mengden slik at:*

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av *førsteordens formler* *er den minste mengden slik at:*

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.*
3. *Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ formler.*
3. *Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.*

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\mathrm{Idol}(x), \mathrm{Idol}(a), \mathrm{Liker}(a, a), \mathrm{Liker}(a, b)$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\mathrm{Idol}(x), \mathrm{Idol}(a), \mathrm{Liker}(a, a), \mathrm{Liker}(a, b)$
- $\exists x(\mathrm{Idol}(x))$ - "det fins et Idol"

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\mathrm{Idol}(x), \mathrm{Idol}(a), \mathrm{Liker}(a, a), \mathrm{Liker}(a, b)$
- $\exists x(\mathrm{Idol}(x))$ - "det fins et Idol"
- $\forall x \exists y(\mathrm{Liker}(x, y))$ - "alle liker noen"

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\mathrm{Idol}(x), \mathrm{Idol}(a), \mathrm{Liker}(a, a), \mathrm{Liker}(a, b)$
- $\exists x(\mathrm{Idol}(x))$ - "det fins et Idol"
- $\forall x \exists y(\mathrm{Liker}(x, y))$ - "alle liker noen"
- $\forall x(\mathrm{Liker}(x, a))$ - "alle liker a"

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\mathrm{Idol}(x), \mathrm{Idol}(a), \mathrm{Liker}(a, a), \mathrm{Liker}(a, b)$
- $\exists x(\mathrm{Idol}(x))$ - "det fins et Idol"
- $\forall x \exists y(\mathrm{Liker}(x, y))$ - "alle liker noen"
- $\forall x(\mathrm{Liker}(x, a))$ - "alle liker a"
- $\neg\exists x(\mathrm{Liker}(x, b))$ - "ingen liker b"

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\mathrm{Idol}(x), \mathrm{Idol}(a), \mathrm{Liker}(a, a), \mathrm{Liker}(a, b)$
- $\exists x(\mathrm{Idol}(x))$ - "det fins et Idol"
- $\forall x \exists y(\mathrm{Liker}(x, y))$ - "alle liker noen"
- $\forall x(\mathrm{Liker}(x, a))$ - "alle liker a"
- $\neg \exists x(\mathrm{Liker}(x, b))$ - "ingen liker b"
- $\forall x(\mathrm{Idol}(x) \rightarrow \mathrm{Liker}(x, x))$ - "alle idoler liker seg selv"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, så har vi formlene

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; =\rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y (y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; =\rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y(y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"
- $\neg \exists x(0 = sx)$ - "0 er ikke etterfølgeren til noe"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y (y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"
- $\neg \exists x (0 = sx)$ - "0 er ikke etterfølgeren til noe"
- $\exists x \exists y (\neg (x = y))$ - "det fins to forskjellige objekter"