

Forelesning 8: Førsteordens logikk – sekventkalkyle og sunnhet

Roger Antonsen - 13. mars 2006

1 Førsteordens sekventkalkyle

1.1 Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ , er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\neg Qa, Pa \vdash Pa}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa} \\
 \hline
 \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \\
 \times \\
 \frac{Qa \vdash Qa, \neg Pa}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa} \\
 \hline
 Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \\
 \frac{Pa \rightarrow Qa \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
 \end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Pa, Po \rightarrow Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa} \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \\
 \times \\
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash Qa, \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa} \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \\
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px) \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
 \end{array}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:
 - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t .
 - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
 - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et *vitne* – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
 - Å oppfylle/falsifisere \exists -formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som *sekvent*, *aksiom*, *utledning* og *bevis* for førsteordens språk.

1.2 Sekventer og aksiomer

Definisjon 1.1 (Parameter). La \mathcal{L} være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt *parametre*, forskjellige fra konstantsymbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{par} være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon 1.2 (Sekvent). En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L}^{par} .

Definisjon 1.3 (Aksiom). Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær formel.

Oppgave. Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash Qb \rightarrow Rb$
- $\forall x Px, Pa \vdash Pa, \exists x Pa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

1.3 Sekventkalkyleregler

Definisjon 1.4 (γ -regler). γ -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi} \text{R}\exists$$

t er en lukket term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ -reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Definisjon 1.5 (δ -regler). δ -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ -reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ - og δ -reglene er derfor *veldefinerte* i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon 1.6 (Slutningsreglene i førsteordens LK). *Slutningsreglene i førsteordens LK er α - og β -reglene fra utsagnslogisk LK og γ - og δ -reglene.*

1.4 Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene *slutninger* ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x (Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} \text{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Teksten til høyre for streken er regelens *navn*.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles *hovedformel*.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles *aktive formler*.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles *ekstraformler*.

1.5 Utledninger

- Ett-premissregler: α -, γ - og δ -reglene.
- To-premissregler: β -reglene.

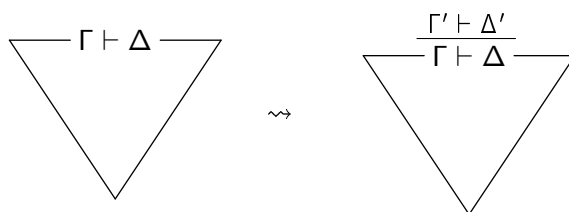
Definisjon 1.7 (LK-utledninger – basistilfelle). En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formuler i \mathcal{L} , er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

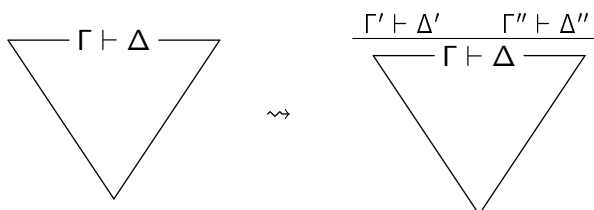
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket \mathcal{L}^{par} brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ -reglene.

Definisjon 1.8 (LK-utledninger – ett-premissutvidelse). Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Definisjon 1.9 (LK-utledninger – to-premissutvidelse). Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



1.6 Bevis

Definisjon 1.10 (LK-bevis). Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon 1.11 (LK-bevisbar). En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

1.7 Eksempler

Eksempel 1

$$\frac{\frac{\times}{\frac{\forall x Px, Pa \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
 - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sannhetsteoremet.

Eksempel 2

$$\frac{\frac{\times}{\frac{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall x Px$ sann.
 - Domenet må bestå av minst ett element e .
 - Siden \mathcal{M} gjør $\forall x Px$ sann, må \mathcal{M} gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
 - Siden \mathcal{M} gjør $P\bar{e}$ sann, må \mathcal{M} gjøre formelen $\exists x Px$ sann.
- At sekventen er gyldig følger også fra sannhetsteoremet.

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\times}{\frac{\forall x (Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x (Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa}}{\forall x (Px \wedge Qx) \vdash Pa}}{\forall x (Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px} \quad \frac{\frac{\frac{\times}{\frac{\forall x (Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x (Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa}}{\forall x (Px \wedge Qx) \vdash Qa}}{\forall x (Px \wedge Qx) \vdash \forall x Qx}}{\forall x (Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px \wedge \forall x Qx}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x (Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px \wedge \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall x (Px \wedge Qx)$ sann.
 - Velg et vilkårlig element e i domenet til \mathcal{M} .
 - Ved antakelsen må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e} \wedge Q\bar{e}$ sann.
 - Da må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
 - Siden e var vilkårlig valgt, må \mathcal{M} også gjøre $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sannhetsteoremet.

Eksempel 4

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \hline
 \forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby \\
 \hline
 \forall yLya, Lba \vdash \exists yLby \\
 \hline
 \forall yLya \vdash \exists yLby \\
 \hline
 \forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy \\
 \hline
 \exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy
 \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
 - Da fins det et element a slik at $\forall yLy\bar{a}$ er sann i \mathcal{M} .
 - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i \mathcal{M} , velg et vilkårlig element b .
 - Det er nok å vise at $\exists yL\bar{b}y$ er sann i \mathcal{M} .
 - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i \mathcal{M} , siden $\forall yLy\bar{a}$ er sann i \mathcal{M} .
 - “Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker.”
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x\forall yLyx \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall yLyc, \exists x\forall yLyx \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x\forall yLyx \exists x\forall yLyx \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy, \exists yLby, Loa \vdash Lba, \exists x\forall yLyx \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy \forall x\exists yLxy, Loa \vdash Lba, \exists x\forall yLyx \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy, Loa \vdash \forall yLya, \exists x\forall yLyx \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy, Loa \vdash \exists x\forall yLyx \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy, \exists yLoy \vdash \exists x\forall yLyx \\
 \hline
 \forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx
 \end{array}$$

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekvenser.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x\exists yLxy$.
 - $\mathcal{M} \models \exists yL\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.

- $\mathcal{M} \models \exists y L \bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L \bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y L yx$.
 - $\mathcal{M} \not\models \forall y L y\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L \bar{b}\bar{a}$.
 - $\mathcal{M} \not\models \forall y L y\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L \bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)}{Po \vdash Pa, Pa \rightarrow \forall x Px, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)} \\
 \frac{Po \vdash Pa, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px) \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)}{Po \vdash \forall x Px, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)} \\
 \frac{}{\vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)} \\
 \frac{}{\vdash \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)}
 \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x (Px \rightarrow \forall x Px)$ er bevisbar.
- “Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball.”
- Dette er ikke den samme påstanden som: “Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball.”
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

2 Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

2.1 Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært *ukorrekt* eller *usunn*...

Definisjon 2.1 (Sunnhet). *En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.*

Teorem 2.1 (Sunnhet). *Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.*

2.2 Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk \mathcal{L} er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede \mathcal{L} -formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle \mathcal{L} -modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket \mathcal{L}^{par} .
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er \mathcal{L}^{par} -modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle \mathcal{L}^{par} -modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle \mathcal{L} -modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av \mathcal{L} -formler.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

2.3 Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon 2.2. En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ -slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.

Lemma 2.1. Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi har vist at α - og β -reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ - og δ -reglene har egenskapen.

Bevis for at $L\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$. (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$. (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og \bar{e} må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.
- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma 2.2. La \mathcal{M} være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Oppgave: bevis lemmaet. Hint: induksjon på φ .

Bevis for at $\text{L}\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan *ikke* uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at \mathcal{M}' falsifiserer premisset:
 - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må \mathcal{M}' og \mathcal{M} tolke formlene i Γ og Δ likt. \mathcal{M}' gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
 - Siden a og \bar{d} må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

- Anta at \mathcal{M} er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.
 - $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, \mathcal{M} falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil \mathcal{M}' falsifiserer premisset.

Bevis for at $R\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists \quad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av \mathcal{M} .
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$. (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$. (Her bruker vi definisjonen av oppfylbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og \bar{e} må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at $R\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi} R\forall \quad a \text{ er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen}$$

- Anta at modellen \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi$.
- \mathcal{M} gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x\varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan *ikke* uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen \mathcal{M} lager vi en ny modell \mathcal{M}' på følgende måte:
 - \mathcal{M}' skal være helt lik \mathcal{M} bortsett fra når det gjelder tolkningen av a .
 - Parameteren a skal tolkes som elementet d , dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at \mathcal{M}' falsifiserer premisset:
 - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må \mathcal{M}' og \mathcal{M} tolke formlene i Γ og Δ likt. \mathcal{M}' gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
 - Siden a og \bar{d} må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \not\models \varphi[a/x]$.

Lemma 2.3. *Hvis rotsekventen i en LK-utledning π er falsifiserer, så er minst én av løvsekventene i π falsifiserbar.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π .
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

2.4 Alle aksiomer er gyldige

Lemma 2.4. *Alle aksiomer er gyldige.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.

- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leq i \leq n$.

- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \dots, s_n)$.
- Dermed oppfylles en formel i succedenten, $P(t_1, \dots, t_n)$.

2.5 Sunnhetsbeviset

Teorem 2.2 (Sunnhet). *Sekventkalkylen LK for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.

□