

INF3170 – Logikk

Forelesning 10: Automatisk bevissøk – introduksjon,
substitusjoner og unifisering

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

3. april 2006



Dagens plan

1 Automatisk bevissøk

- Introduksjon
- Substitusjoner
- Unifisering

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
 - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
 - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
 - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
 - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
 - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- **Sunnhet** sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
 - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
 - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- **Sunnhet** sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- **Kompletthet** sikrer oss at det *finnes* et bevis for enhver gyldig sekvent.

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
 - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
 - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- **Sunnhet** sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- **Kompletthet** sikrer oss at det *finnes* et bevis for enhver gyldig sekvent.
- Kalkylen sier imidlertid ingenting om **hvordan** man finner bevis for gyldige sekventer!

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
 - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
 - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- **Sunnhet** sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- **Kompletthet** sikrer oss at det *finnes* et bevis for enhver gyldig sekvent.
- Kalkylen sier imidlertid ingenting om **hvordan** man finner bevis for gyldige sekventer!
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
 - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
 - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- **Sunnhet** sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- **Kompletthet** sikrer oss at det *finnes* et bevis for enhver gyldig sekvent.
- Kalkylen sier imidlertid ingenting om **hvordan** man finner bevis for gyldige sekventer!
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- La oss forsøke!

Noen begreper

- En utledning er **lukket** hvis alle grenene er lukket.

Noen begreper

- En utledning er **lukket** hvis alle grenene er lukket.
- En utledning er **utvidbar** hvis det er mulig å anvende en regel på en formel i en løvsekvent i utledningen.

Noen begreper

- En utledning er **lukket** hvis alle grenene er lukket.
- En utledning er **utvidbar** hvis det er mulig å anvende en regel på en formel i en løvsekvent i utledningen.
- En søkealgoritme er **komplett** hvis den *finner* et bevis for enhver gyldig sekvent.

Algoritme: gyldig? ($\Gamma \vdash \Delta$)

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta;$

Algoritme: gyldig? ($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$;

while (π ikke er lukket) **do**

end while

Algoritme: gyldig? ($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$;

while (π ikke er lukket) **do**

if (π ikke er utvidbar) **then**

end if

end while

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$) $\pi := \Gamma \vdash \Delta$;**while** (π ikke er lukket) **do****if** (π ikke er utvidbar) **then**return *“ikke gyldig”*;**end if****end while**

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$) $\pi := \Gamma \vdash \Delta;$ **while** (π ikke er lukket) **do****if** (π ikke er utvidbar) **then**return *“ikke gyldig”*;**else****end if****end while**

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$;

while (π ikke er lukket) **do**

if (π ikke er utvidbar) **then**

 return *“ikke gyldig”*;

else

$\varphi :=$ ikke-atomær formel i løvsekvent i π ;

end if

end while

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$) $\pi := \Gamma \vdash \Delta$;**while** (π ikke er lukket) **do****if** (π ikke er utvidbar) **then**return "*ikke gyldig*";**else** $\varphi :=$ ikke-atomær formel i løvsekvent i π ;utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ ;**end if****end while**

Algoritme: gyldig? ($\Gamma \vdash \Delta$) $\pi := \Gamma \vdash \Delta$;**while** (π ikke er lukket) **do****if** (π ikke er utvidbar) **then**return *“ikke gyldig”*;**else** $\varphi :=$ ikke-atomær formel i løvsekvent i π ;utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ ;**end if****end while**return *“gyldig”*;

Algoritme: gyldig? ($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$;

while (π ikke er lukket) **do**

if (π ikke er utvidbar) **then**

 return *“ikke gyldig”*;

else

$\varphi :=$ ikke-atomær formel i løvsekvent i π ;

 utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ ;

end if

end while

return *“gyldig”*;

- Algoritmen er komplett hvis utvelgelsen av φ er **rettferdig**.

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
 - ① Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
 - ① Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
 - ② Strategi for valg av utvidelse av utledningen.

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
 - ① Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
 - ② Strategi for valg av utvidelse av utledningen.
 - ③ Hvor effektiv er selve utvidelsen, dvs. regelanvendelsen?

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
 - ① Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
 - ② Strategi for valg av utvidelse av utledningen.
 - ③ Hvor effektiv er selve utvidelsen, dvs. regelanvendelsen?
- Punkt 2 kommer vi i liten grad inn på i kurset.

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
 - ① Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
 - ② Strategi for valg av utvidelse av utledningen.
 - ③ Hvor effektiv er selve utvidelsen, dvs. regelanvendelsen?
- Punkt 2 kommer vi i liten grad inn på i kurset.
- Punkt 1 og 3 skal vi imidlertid se på.

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
 - ① Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
 - ② Strategi for valg av utvidelse av utledningen.
 - ③ Hvor effektiv er selve utvidelsen, dvs. regelanvendelsen?
- Punkt 2 kommer vi i liten grad inn på i kurset.
- Punkt 1 og 3 skal vi imidlertid se på.
- La oss starte med punkt 3 – effektiviteten til regelanvendelsene.

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α - og β -reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α - og β -reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α - og β -reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α - og β -reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.
- Riktignok får vi en del formelkopiering i β -regelen, men dette kan optimaliseres med f.eks. pekere i en objektorientert implementasjon.

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α - og β -reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.
- Riktignok får vi en del formelkopiering i β -regelen, men dette kan optimaliseres med f.eks. pekere i en objektorientert implementasjon.
- δ -regelen setter inn en ny parameter for den bundne variabelen:

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α - og β -reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.
- Riktignok får vi en del formelkopiering i β -regelen, men dette kan optimaliseres med f.eks. pekere i en objektorientert implementasjon.
- δ -regelen setter inn en ny parameter for den bundne variabelen:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists$$

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α - og β -reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.
- Riktignok får vi en del formelkopiering i β -regelen, men dette kan optimaliseres med f.eks. pekere i en objektorientert implementasjon.
- δ -regelen setter inn en ny parameter for den bundne variabelen:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists$$

- Parametrene kan nummereres: utføres i konstant tid.

γ -reglene

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x .

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x .
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ -formel med **alle** termene i Herbranduniverset.

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x .
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ -formel med **alle** termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ -formlene i denne rekkefølgen.

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x .
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ -formel med **alle** termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ -formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å **finne bevis så tidlig som mulig?**

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x .
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ -formel med **alle** termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ -formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å **finne bevis så tidlig som mulig?**

$$\forall xPx \vdash Pffa, Qga$$

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x .
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ -formel med **alle** termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ -formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å **finne bevis så tidlig som mulig?**

$$a, \underset{1}{f}a, \underset{2}{g}a, \underset{3}{ff}a, \underset{4}{fg}a, \dots, \underset{i}{fffa}, \dots$$

$$\forall xPx \vdash Pfffa, Qga$$

γ -reglene

- La oss se på γ -reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} \text{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x .
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ -formel med **alle** termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ -formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å **finne bevis så tidlig som mulig?**

$$\frac{\forall xPx, Pa, \dots, Pffa \vdash Pffa, Qga}{\vdots} \qquad a, \underset{1}{fa}, \underset{2}{ga}, \underset{3}{ffa}, \underset{4}{fga}, \dots, \underset{i}{ffa}, \dots$$

$$\frac{\forall xPx, Pa \vdash Pffa, Qga}{\forall xPx \vdash Pffa, Qga}$$

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

$$\forall xPx \vdash Pa \wedge Pb$$

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

$$\frac{\forall x P x \vdash Pa \quad \forall x P x \vdash Pb}{\forall x P x \vdash Pa \wedge Pb}$$

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

$$\frac{\frac{\forall x P x, P u \vdash P a}{\forall x P x \vdash P a} \quad \forall x P x \vdash P b}{\forall x P x \vdash P a \wedge P b}$$

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

$$\frac{\frac{\forall x P x, P u \vdash P a}{\forall x P x \vdash P a} \quad \frac{\forall x P x, P v \vdash P b}{\forall x P x \vdash P b}}{\forall x P x \vdash P a \wedge P b}$$

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

$$\frac{\frac{a/u}{\forall x P x, P u \vdash P a} \quad \frac{b/v}{\forall x P x, P v \vdash P b}}{\forall x P x \vdash P a \wedge P b}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

$$\frac{\frac{a/u}{\forall x P x, P u \vdash P a} \quad \frac{b/v}{\forall x P x, P v \vdash P b}}{\frac{\forall x P x \vdash P a \quad \forall x P x \vdash P b}{\forall x P x \vdash P a \wedge P b}}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?

Utsette valg av γ -term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ -reglene til et senere tidspunkt.
- La γ -reglene sette inn **frie variable**:

$$\frac{\frac{a/u}{\forall x P x, P u \vdash P a} \quad \frac{b/v}{\forall x P x, P v \vdash P b}}{\forall x P x \vdash P a \wedge P b}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?
- Problemet kan løses med **unifiseringsalgoritmer**.

δ -reglene

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$$

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\frac{\exists yLy \vdash \forall yLy}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}$$

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\frac{\frac{L_{ua} \vdash L_{bv}}{\exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv}}}{\forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}}$$

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\frac{\frac{b/u, a/v}{L_{ua} \vdash L_{bv}}{\exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv}}}{\forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}}$$

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\begin{array}{c}
 b/u, a/v \\
 \hline
 L_{ua} \vdash L_{bv} \\
 \hline
 \exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv} \\
 \hline
 \forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}
 \end{array}$$

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\begin{array}{c}
 b/u, a/v \\
 \hline
 L_{ua} \vdash L_{bv} \\
 \hline
 \exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv} \\
 \hline
 \forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}
 \end{array}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\begin{array}{c}
 b/u, a/v \\
 \hline
 L_{ua} \vdash L_{bv} \\
 \hline
 \exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv} \\
 \hline
 \forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}
 \end{array}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en **Skolemfunksjon**

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\begin{array}{c}
 b/u, a/v \\
 \hline
 L_{ua} \vdash L_{bv} \\
 \hline
 \exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv} \\
 \hline
 \forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}
 \end{array}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en **Skolemfunksjon**, og u_1, \dots, u_n er alle variablene som forekommer fritt i δ -formelen.

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\begin{array}{c}
 b/u, a/v \\
 \hline
 L_{ua} \vdash L_{bv} \\
 \hline
 \exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv} \\
 \hline
 \forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}
 \end{array}
 \qquad
 \forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en **Skolemfunksjon**, og u_1, \dots, u_n er alle variablene som forekommer fritt i δ -formelen.

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\begin{array}{c}
 b/u, a/v \\
 \hline
 L_{ua} \vdash L_{bv} \\
 \hline
 \exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv} \\
 \hline
 \forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \exists y L_{uy} \vdash \forall y L_{yv} \\
 \hline
 \forall x \exists y L_{xy} \vdash \exists x \forall y L_{yx}
 \end{array}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en **Skolemfunksjon**, og u_1, \dots, u_n er alle variablene som forekommer fritt i δ -formelen.

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\frac{\frac{b/u, a/v}{Lua \vdash Lbv}}{\frac{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}}$$

$$\frac{Luf(u) \vdash Lg(v)v}{\frac{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en **Skolemfunksjon**, og u_1, \dots, u_n er alle variablene som forekommer fritt i δ -formelen.

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\frac{\frac{b/u, a/v}{Lua \vdash Lbv}}{\frac{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}}$$

kan ikke lukkes

$$\frac{Luf(u) \vdash Lg(v)v}{\frac{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en **Skolemfunksjon**, og u_1, \dots, u_n er alle variablene som forekommer fritt i δ -formelen.

δ -reglene

- Når vi setter inn variable i γ -reglene får vi imidlertid problemer med δ -reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er **ny** når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\frac{\frac{b/u, a/v}{Lua \vdash Lbv}}{\frac{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x \exists yLxy \vdash \exists x \forall yLyx}}$$

kan ikke lukkes

$$\frac{Luf(u) \vdash Lg(v)v}{\frac{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}{\forall x \exists yLxy \vdash \exists x \forall yLyx}}$$

- Vi lar δ -reglene introdusere en **Skolemterm**:

$$f(u_1, \dots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en **Skolemfunksjon**, og u_1, \dots, u_n er alle variablene som forekommer fritt i δ -formelen.

- På den måten sikrer vi at termen introdusert av δ -regelen er **ny** uansett hva slags verdi vi velger å instansiere de frie variablene med.

Oppsummering

Oppsummering

- Vi skal introdusere en **fri-variabel sekventkalkyle**

Oppsummering

- Vi skal introdusere en **fri-variabel sekventkalkyle** og vise at den er **sun**n og **komplett**.

Oppsummering

- Vi skal introdusere en **fri-variabel sekventkalkyle** og vise at den er **sun**n og **komplett**.
- γ -reglene introduserer nye **frie variable**

Oppsummering

- Vi skal introdusere en **fri-variabel sekventkalkyle** og vise at den er **sun** og **komplett**.
- γ -reglene introduserer nye **frie variable** og δ -reglene introduserer **Skolemtermer**.

Oppsummering

- Vi skal introdusere en **fri-variabel sekventkalkyle** og vise at den er **sun** og **komplett**.
- γ -reglene introduserer nye **frie variable** og δ -reglene introduserer **Skolemtermer**.
- Ved hjelp av **unifiseringsalgoritmer** konstrueres lukkende **substitusjoner** for utledningene.

1 Automatisk bevissøk

- Introduksjon
- **Substitusjoner**
- Unifisering

Substitusjoner

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s .

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s .
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer **samtidig**.

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s .
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer **samtidig**.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – **substitusjoner** – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s .
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer **samtidig**.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – **substitusjoner** – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.
- Notasjon: Når vi anvender en substitusjon σ på en formel φ eller en term t skriver vi $\varphi\sigma$ eller $t\sigma$ istedenfor $\sigma(\varphi)/\sigma(t)$.

Definisjon (Substitusjon)

Definisjon (Substitusjon)

En *substitusjon* er en funksjon σ fra mengden variable \mathcal{V}

Definisjon (Substitusjon)

En *substitusjon* er en funksjon σ fra mengden variable \mathcal{V} til mengden av termer \mathcal{T} i et gitt førsteordens språk.

Definisjon (Substitusjon)

En *substitusjon* er en funksjon σ fra mengden variable \mathcal{V} til mengden av termer \mathcal{T} i et gitt førsteordens språk.

- *Støtten* (support) eller *støttemengden* (support set) til σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.

Definisjon (Substitusjon)

En *substitusjon* er en funksjon σ fra mengden variable \mathcal{V} til mengden av termer \mathcal{T} i et gitt førsteordens språk.

- *Støtten* (support) eller *støttemengden* (support set) til σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.
- σ er *grunn* dersom $x\sigma$ er en lukket term for alle variable x i støttemengden til σ .

Notasjon

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \dots, x_n\}$

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \dots, x_n\}$ slik at
 $x_1\sigma = t_1, \dots, x_n\sigma = t_n$

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \dots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \dots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$$

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \dots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \dots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen ϵ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable x kalles **identitetssubstitusjonen**.

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \dots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \dots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen ϵ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable x kalles **identitetssubstitusjonen**.
- Identitetssubstitusjonen kan skrives $\{\}$ siden den har tom støttemengde.

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\tau = \{a/y, fx/z\}$$

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\tau = \{a/y, fx/z\}$$

- er en substitusjon slik at

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\tau = \{a/y, fx/z\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $y\sigma = a$

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\tau = \{a/y, fx/z\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $y\tau = a$
 - $z\tau = fx$

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\tau = \{a/y, fx/z\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $y\tau = a$
 - $z\tau = fx$
 - $v\tau = v$ for alle andre variable

$$\sigma = \{a/x, fa/y\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $x\sigma = a$
 - $y\sigma = fa$
 - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$$\tau = \{a/y, fx/z\}$$

- er en substitusjon slik at
 - $y\sigma = a$
 - $z\sigma = fx$
 - $v\sigma = v$ for alle andre variable
- er **ikke** en grunn substitusjon

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- *$c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .*

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau$

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ for et konstantsymbol c .
- $f(t_1, \dots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$ for en funksjonsterm $f(t_1, \dots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau = f(y, x)$

Substitusjon på formler

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma$.

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall xPx \rightarrow Qb$.

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall xPx \rightarrow Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall xPx \rightarrow Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall xPx \rightarrow Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

La σ være en substitusjon. Substitusjonen σ **begrenset** på x , skrevet σ_x , er definert slik at

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner **ikke** skal endre **bundne** variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \rightarrow Qy)\sigma = \forall xPx \rightarrow Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

La σ være en substitusjon. Substitusjonen σ **begrenset** på x , skrevet σ_x , er definert slik at

$$y\sigma_x = \begin{cases} x & \text{hvis } x = y \\ y\sigma & \text{ellers} \end{cases}$$

for enhver variabel y .

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

$$\textcircled{1} R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
- 3 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
- 3 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
- 3 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- 4 $(Qx\psi)\sigma$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
- 3 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- 4 $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
- 3 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- 4 $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

- 1 $R(t_1, \dots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- 2 $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
- 3 $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- 4 $(Qx\psi)\sigma = Qx(\psi\sigma_x)$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.
- Dette kan vi unngå ved å omdøpe bundne variable.

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- σ_x

$$\text{La } \sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z \}$

$$\text{La } \sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z \}$
- σ_y

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{~~fx/x~~, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, ~~a/y~~, y/z\}$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{~~fx/x~~, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, ~~a/y~~, y/z\}$
- σ_z

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{~~fx/x~~, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, ~~a/y~~, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, ~~y/z~~\}$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{~~fx/x~~, a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, ~~a/y~~, y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, ~~y/z~~\}$
- $P(x, y)\sigma$

$$\text{La } \sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z \}$
- $\sigma_y = \{ fx/x, \cancel{a/y}, y/z \}$
- $\sigma_z = \{ fx/x, a/y, \cancel{y/z} \}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z \}$
- $\sigma_y = \{ fx/x, \cancel{a/y}, y/z \}$
- $\sigma_z = \{ fx/x, a/y, \cancel{y/z} \}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z \}$
- $\sigma_y = \{ fx/x, \cancel{a/y}, y/z \}$
- $\sigma_z = \{ fx/x, a/y, \cancel{y/z} \}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x (P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z \}$
- $\sigma_y = \{ fx/x, \cancel{a/y}, y/z \}$
- $\sigma_z = \{ fx/x, a/y, \cancel{y/z} \}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x (P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$
- $\exists z (P_x \rightarrow Qz)\sigma$

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}, a/y, y/z \}$
- $\sigma_y = \{ fx/x, \cancel{a/y}, y/z \}$
- $\sigma_z = \{ fx/x, a/y, \cancel{y/z} \}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall x P(x, y)\sigma = \forall x (P(x, y)\sigma_x) = \forall x P(x, a)$
- $\exists z (P_x \rightarrow Qz)\sigma = \exists z ((P_x \rightarrow Qz)\sigma_z) = \exists z (Pfx \rightarrow Qz)$

Komposisjon av substitusjoner

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ : $(\varphi\sigma)\tau$.

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ : $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ .

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ : $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ .

Definisjon (Komposisjon av substitusjoner)

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ : $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ .

Definisjon (Komposisjon av substitusjoner)

La σ og τ være substitusjoner.

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ : $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ .

Definisjon (Komposisjon av substitusjoner)

La σ og τ være substitusjoner. *Komposisjonen* av σ og τ er en substitusjon skrevet $\sigma\tau$

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ : $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ .

Definisjon (Komposisjon av substitusjoner)

La σ og τ være substitusjoner. *Komposisjonen* av σ og τ er en substitusjon skrevet $\sigma\tau$ slik at $x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau$ for hver variabel x .

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ : $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ .

Definisjon (Komposisjon av substitusjoner)

La σ og τ være substitusjoner. *Komposisjonen* av σ og τ er en substitusjon skrevet $\sigma\tau$ slik at $x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau$ for hver variabel x .

- Oppgave: vis at $\varphi(\sigma\tau) = (\varphi\sigma)\tau$ for alle formler φ og alle substitusjoner σ og τ .

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$.

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 =$$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, \quad \}$$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{ \quad \quad \quad \}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{ \quad /x \quad \}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x \quad \quad \quad \}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, \quad /y \quad \}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y \quad \quad \quad \}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, \quad /z\}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{ \quad /x \quad \}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x \quad \quad \quad \}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x, \quad /y\}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x, (y\tau)/y\}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x, (y\tau)/y\} = \{x/x, x/y\}$

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \dots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \dots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \dots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der z_1, \dots, z_m er de variablene blant y_1, \dots, y_k som *ikke* er blant x_1, \dots, x_n .

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x, (y\tau)/y\} = \{x/x, x/y\} = \{x/y\}$.

1 Automatisk bevissøk

- Introduksjon
- Substitusjoner
- Unifisering

Unifisering

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

- En substitusjon som gjør termene s og t syntaktisk like, kalles en **unifikator** for s og t .

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.

- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i .
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

- En substitusjon som gjør termene s og t syntaktisk like, kalles en **unifikator** for s og t .
- To termer er **unifiserbare** hvis de har en unifikator.

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*.

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:

f

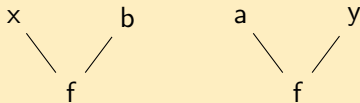
f

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:

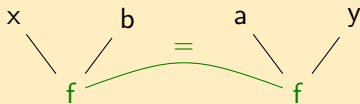


Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



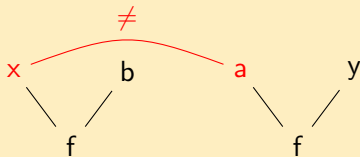
- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



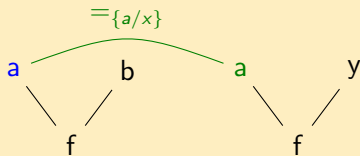
- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



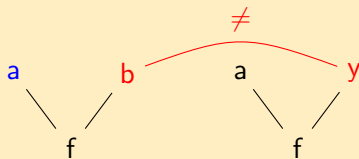
- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



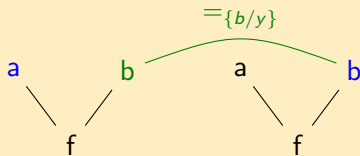
- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Symbolene i høyre barn er ulike

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

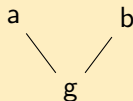
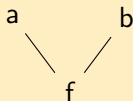
Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



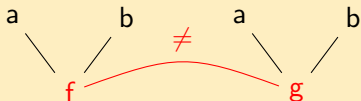
- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Symbolene i høyre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{b/y\}$.

Er $f(a, b)$ og $g(a, b)$ unifiserbare?

Er $f(a, b)$ og $g(a, b)$ unifiserbare?



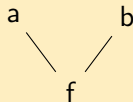
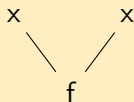
Er $f(a, b)$ og $g(a, b)$ unifiserbare?



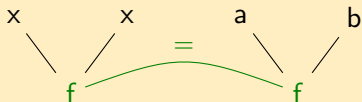
- Symbolene i posisjon 0 er ulike, og kan *ikke* unifiseres!

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?

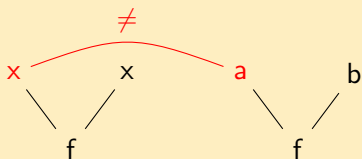


Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?



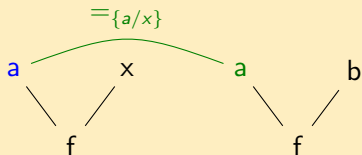
- Symbolene i posisjon 0 er like.

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?



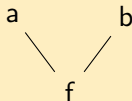
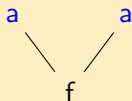
- Symbolene i posisjon 0 er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?



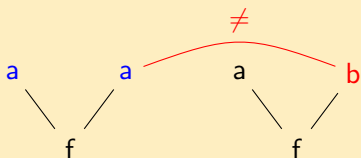
- Symbolene i posisjon 0 er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Vi må anvende $\{a/x\}$ på x i både venstre og høyre barn.

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Vi må anvende $\{a/x\}$ på x i både venstre og høyre barn.
- Symbolene i høyre barn er nå ulike, og kan *ikke* unifiseres!

Er x og $f(x)$ unifiserbare?

Er x og $f(x)$ unifiserbare?

x

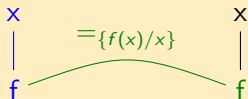
x
|
 f

Er x og $f(x)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er ulike

Er x og $f(x)$ unifiserbare?



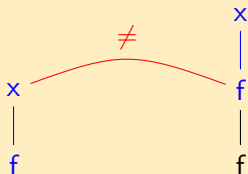
- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.

Er x og $f(x)$ unifiserbare?



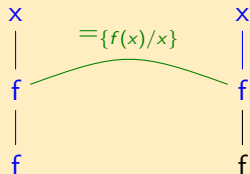
- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på x i høyre tre.

Er x og $f(x)$ unifiserbare?



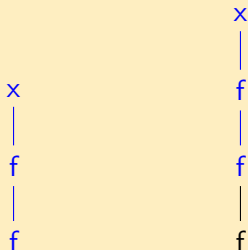
- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på x i høyre tre.
- På posisjon 1 ser vi nå at symbolene x og f er ulike.

Er x og $f(x)$ unifiserbare?



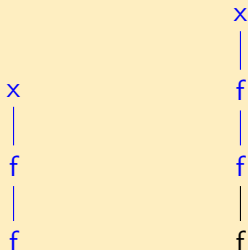
- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på x i høyre tre.
- På posisjon 1 ser vi nå at symbolene x og f er ulike.
- Hvis vi unifiserer med $\{f(x)/x\}$

Er x og $f(x)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på x i høyre tre.
- På posisjon 1 ser vi nå at symbolene x og f er ulike.
- Hvis vi unifiserer med $\{f(x)/x\}$, må vi igjen erstatte x i høyre tre.

Er x og $f(x)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på x i høyre tre.
- På posisjon 1 ser vi nå at symbolene x og f er ulike.
- Hvis vi unifiserer med $\{f(x)/x\}$, må vi igjen erstatte x i høyre tre.
- Sånn kan vi holde på en stund...

Generelt har vi:

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er **ikke** unifiserbare.

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er **ikke** unifiserbare.
- En variabel x er **ikke** unifiserbar med en term som *inneholder* x .

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er **ikke** unifiserbare.
 - En variabel x er **ikke** unifiserbar med en term som *inneholder* x .
-
- Vi skal lage en **unifiseringsalgoritme**, som finner **alle** unifikatorer for to termer.

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er **ikke** unifiserbare.
 - En variabel x er **ikke** unifiserbar med en term som *inneholder* x .
-
- Vi skal lage en **unifiseringsalgoritme**, som finner **alle** unifikatorer for to termer.
 - Problem: To termer har potensielt uendelig mange unifikatorer! Vi kan ikke returnere alle...

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er **ikke** unifiserbare.
 - En variabel x er **ikke** unifiserbar med en term som *inneholder* x .
-
- Vi skal lage en **unifiseringsalgoritme**, som finner **alle** unifikatorer for to termer.
 - Problem: To termer har potensielt uendelig mange unifikatorer! Vi kan ikke returnere alle...
 - Løsning: Finne en **representant** σ for mengden av unifikatorer slik at alle andre unifikatorer kan konstrueres fra σ .

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er **ikke** unifiserbare.
 - En variabel x er **ikke** unifiserbar med en term som *inneholder* x .
-
- Vi skal lage en **unifiseringsalgoritme**, som finner **alle** unifikatorer for to termer.
 - Problem: To termer har potensielt uendelig mange unifikatorer! Vi kan ikke returnere alle...
 - Løsning: Finne en **representant** σ for mengden av unifikatorer slik at alle andre unifikatorer kan konstrueres fra σ .
 - En slik unifikator kalles en **mest generell unifikator**.

Definisjon (Mer generell substitusjon)

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner.

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er *mer generell* enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er *mer generell* enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er *mer generell* enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er *mer generell* enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

Er $\{f(a)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er *mer generell* enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

Er $\{f(a)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Nei, for det finnes ingen substitusjon σ slik at $\{f(y)/x\} = \{f(a)/x\}\sigma$.

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er *mer generell* enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

Er $\{f(a)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Nei, for det finnes ingen substitusjon σ slik at $\{f(y)/x\} = \{f(a)/x\}\sigma$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er *mer generell* enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

Er $\{f(a)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Nei, for det finnes ingen substitusjon σ slik at $\{f(y)/x\} = \{f(a)/x\}\sigma$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Ja, siden $\{f(y)/x\} = \{f(y)/x\}\epsilon$. (Husk: ϵ er identitetssubstitusjonen.)

Definisjon (Unifikator)

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer.

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en *unifikator* for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en *unifikator* for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en *mest generell unifikator* (mgu) for s og t hvis

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en *unifikator* for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en *mest generell unifikator* (mgu) for s og t hvis
 - den er en unifikator for s og t , og

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en *unifikator* for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en *mest generell unifikator* (mgu) for s og t hvis
 - den er en unifikator for s og t , og
 - den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t .

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en **unifikator** for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en **mest generell unifikator** (mgu) for s og t hvis
 - den er en unifikator for s og t , og
 - den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t .

Vi sier at s og t er **unifiserbare** hvis de har en unifikator.

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en **unifikator** for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en **mest generell unifikator** (mgu) for s og t hvis
 - den er en unifikator for s og t , og
 - den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t .

Vi sier at s og t er **unifiserbare** hvis de har en unifikator.

La $s = f(x)$ og $t = f(y)$.

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en **unifikator** for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en **mest generell unifikator** (mgu) for s og t hvis
 - den er en unifikator for s og t , og
 - den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t .

Vi sier at s og t er **unifiserbare** hvis de har en unifikator.

La $s = f(x)$ og $t = f(y)$.

- $\sigma_1 = \{a/x, a/y\}$ er en unifikator for s og t

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en **unifikator** for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en **mest generell unifikator** (mgu) for s og t hvis
 - den er en unifikator for s og t , og
 - den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t .

Vi sier at s og t er **unifiserbare** hvis de har en unifikator.

La $s = f(x)$ og $t = f(y)$.

- $\sigma_1 = \{a/x, a/y\}$ er en unifikator for s og t
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ og $\sigma_3 = \{x/y\}$ er også unifikatorer for s og t

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- en **unifikator** for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.
- en **mest generell unifikator** (mgu) for s og t hvis
 - den er en unifikator for s og t , og
 - den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t .

Vi sier at s og t er **unifiserbare** hvis de har en unifikator.

La $s = f(x)$ og $t = f(y)$.

- $\sigma_1 = \{a/x, a/y\}$ er en unifikator for s og t
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ og $\sigma_3 = \{x/y\}$ er også unifikatorer for s og t
- σ_2 og σ_3 er de mest generelle unifikatorene for s og t

Variabelomdøping

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Definisjon (Variabelomdøping)

*En substitusjon η er en **variabelomdøping** hvis*

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en **variabelomdøping** hvis

- 1 $x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en **variabelomdøping** hvis

- 1 $x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og
- 2 $x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en **variabelomdøping** hvis

- 1 $x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og
- 2 $x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.

Er disse substitusjonene variabelomdøpinger?

- $\sigma_1 = \{z/x, x/y, y/z\}$
- $\sigma_2 = \{z/x, y/z\}$
- $\sigma_3 = \{z/x, x/y, y/z, a/u\}$

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en **variabelomdøping** hvis

- 1 $x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og
- 2 $x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.

Er disse substitusjonene variabelomdøpinger?

- $\sigma_1 = \{z/x, x/y, y/z\}$ Ja.
- $\sigma_2 = \{z/x, y/z\}$
- $\sigma_3 = \{z/x, x/y, y/z, a/u\}$

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en **variabelomdøping** hvis

- 1 $x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og
- 2 $x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.

Er disse substitusjonene variabelomdøpinger?

- $\sigma_1 = \{z/x, x/y, y/z\}$ Ja.
- $\sigma_2 = \{z/x, y/z\}$ Nei, siden $y\sigma_2 = z\sigma_2$.
- $\sigma_3 = \{z/x, x/y, y/z, a/u\}$

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like **opp til omdøping av variable**.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en **variabelomdøping** hvis

- 1 $x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og
- 2 $x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.

Er disse substitusjonene variabelomdøpinger?

- $\sigma_1 = \{z/x, x/y, y/z\}$ Ja.
- $\sigma_2 = \{z/x, y/z\}$ Nei, siden $y\sigma_2 = z\sigma_2$.
- $\sigma_3 = \{z/x, x/y, y/z, a/u\}$ Nei, siden $u\sigma_3$ ikke er en variabel.

Unikhet “opp til omdøping av variable”

Påstand

Hvis σ_1 og σ_2 er mest generelle unifikatorer for to termer s og t , så finnes en variableomdøping η slik at $\sigma_1\eta = \sigma_2$.

Unikhet “opp til omdøping av variable”

Påstand

Hvis σ_1 og σ_2 er mest generelle unifikatorer for to termer s og t , så finnes en variableomdøping η slik at $\sigma_1\eta = \sigma_2$.

- Bevis som oppgave?

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er:

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x , gx

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x , gx
- Ekte deltermer er:

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x , gx
- Ekte deltermer er: x

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x, gx
- Ekte deltermer er: x

La $t = f(x, a)$.

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x , gx
- Ekte deltermer er: x

La $t = f(x, a)$.

- Deltermer er:

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x , gx
- Ekte deltermer er: x

La $t = f(x, a)$.

- Deltermer er: x , a , $f(x, a)$

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x , gx
- Ekte deltermer er: x

La $t = f(x, a)$.

- Deltermer er: x , a , $f(x, a)$
- Ekte deltermer er:

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x , gx
- Ekte deltermer er: x

La $t = f(x, a)$.

- Deltermer er: x , a , $f(x, a)$
- Ekte deltermer er: x , a

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av *deltermer* av en term t er den minste mengden T slik at

- $t \in T$, og
- hvis $f(t_1, \dots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.

Alle termer i T utenom t er *ekte deltermer* av t .

La $s = gx$.

- Deltermer er: x, gx
- Ekte deltermer er: x

La $t = f(x, a)$.

- Deltermer er: $x, a, f(x, a)$
- Ekte deltermer er: x, a

- En term er altså en delterm av seg selv.

Nummererte termtrær

Nummererte termtrær

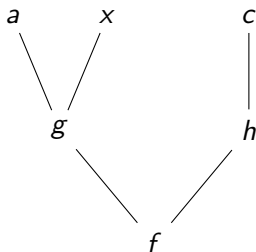
- Vi har sett at termer kan representeres med trær.

Nummererte termtrær

- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtreet:

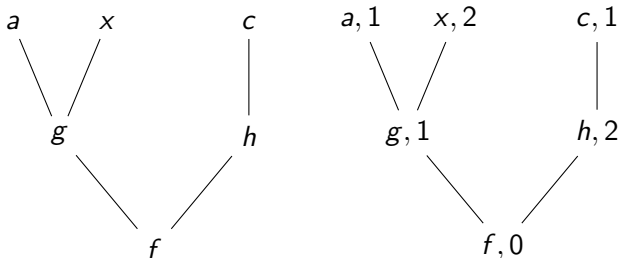
Nummererte termtrær

- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtræet:



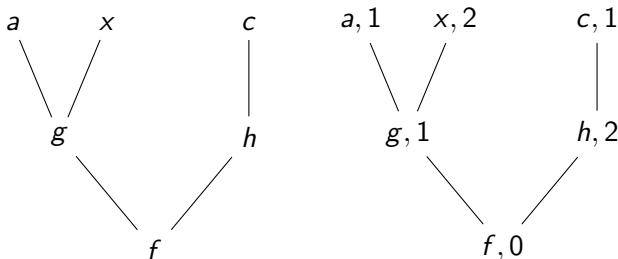
Nummererte termtrær

- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtræet:



Nummererte termtrær

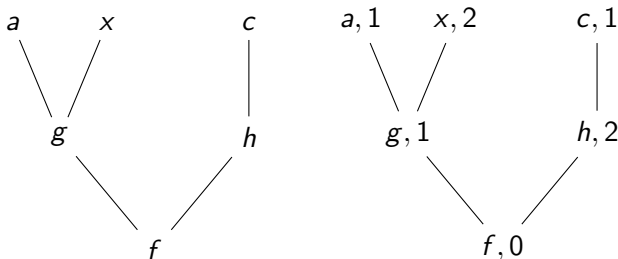
- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtræet:



- Slike trær kalles **nummererte termtrær**.

Nummererte termtrær

- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtræet:



- Slike trær kalles **nummererte termtrær**.
- Vi referer til roten til det nummererte termtræet til en term t som $\text{rot}(t)$.

Kritisk par

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

Et **kritisk par** for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

Et **kritisk par** for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

- k_1 er en delterm av t_1

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

Et **kritisk par** for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

- k_1 er en delterm av t_1
- k_2 er en delterm av t_2

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

Et **kritisk par** for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

- k_1 er en delterm av t_1
- k_2 er en delterm av t_2
- når vi tenker på termer som nummererte termtrær så er

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

Et **kritisk par** for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

- k_1 er en delterm av t_1
- k_2 er en delterm av t_2
- når vi tenker på termer som nummererte termtrær så er
 - $rot(k_1)$ forskjellig fra $rot(k_2)$

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

Et **kritisk par** for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

- k_1 er en delterm av t_1
- k_2 er en delterm av t_2
- når vi tenker på termer som nummererte termtrær så er
 - $\text{rot}(k_1)$ forskjellig fra $\text{rot}(k_2)$
 - stien fra $\text{rot}(t_1)$ til $\text{rot}(k_1)$ er **lik** stien fra $\text{rot}(t_2)$ til $\text{rot}(k_2)$

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er **ulike**.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

Et **kritisk par** for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

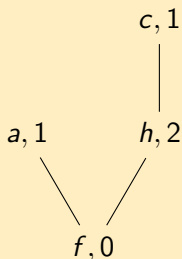
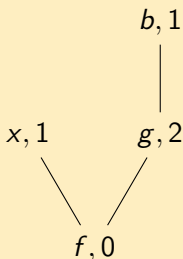
- k_1 er en delterm av t_1
- k_2 er en delterm av t_2
- når vi tenker på termer som nummererte termtrær så er
 - $rot(k_1)$ forskjellig fra $rot(k_2)$
 - stien fra $rot(t_1)$ til $rot(k_1)$ er **lik** stien fra $rot(t_2)$ til $rot(k_2)$
- Merk: stiene kan være tomme, dvs. at termene er ulike allerede i rotsymbolet. Tomme stier er trivielt like...

Eksempel

$La s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$.

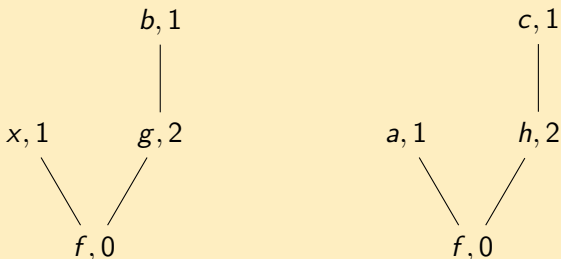
Eksempel

La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



Eksempel

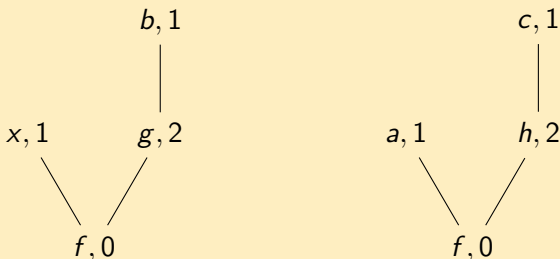
La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- Er $\langle b, c \rangle$ kritisk par for s og t ?

Eksempel

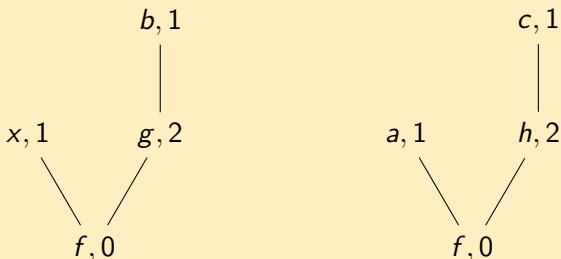
La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- Er $\langle b, c \rangle$ kritisk par for s og t ?
 - *Nei, stien fra rot(s) til rot(b) er ulik stien fra rot(t) til rot(c).*

Eksempel

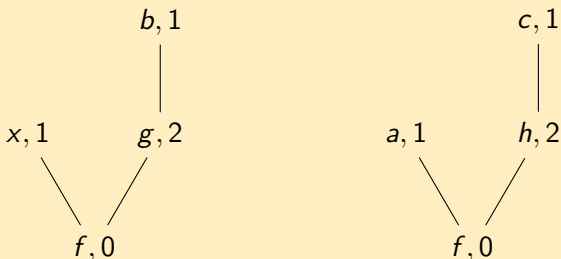
La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- Er $\langle b, c \rangle$ kritisk par for s og t ?
 - *Nei, stien fra rot(s) til rot(b) er ulik stien fra rot(t) til rot(c).*
- Er $\langle x, a \rangle$ kritisk par for s og t ?

Eksempel

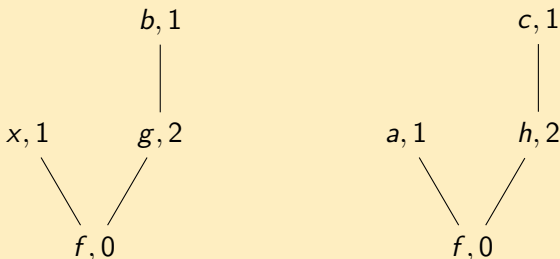
La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- Er $\langle b, c \rangle$ kritisk par for s og t ?
 - *Nei, stien fra rot(s) til rot(b) er ulik stien fra rot(t) til rot(c).*
- Er $\langle x, a \rangle$ kritisk par for s og t ? *Ja.*

Eksempel

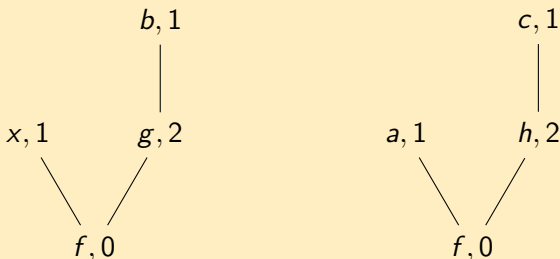
La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- Er $\langle b, c \rangle$ kritisk par for s og t ?
 - *Nei, stien fra rot(s) til rot(b) er ulik stien fra rot(t) til rot(c).*
- Er $\langle x, a \rangle$ kritisk par for s og t ? *Ja.*
- Er $\langle gb, hc \rangle$ kritisk par for s og t ?

Eksempel

La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- Er $\langle b, c \rangle$ kritisk par for s og t ?
 - *Nei, stien fra rot(s) til rot(b) er ulik stien fra rot(t) til rot(c).*
- Er $\langle x, a \rangle$ kritisk par for s og t ? *Ja.*
- Er $\langle gb, hc \rangle$ kritisk par for s og t ? *Ja.*

Algoritme: $\text{unifiser}(t_1, t_2)$

Algoritme: $\text{unifiser}(t_1, t_2)$

$\sigma := \epsilon;$

Algoritme: $\text{unifiser}(t_1, t_2)$

$\sigma := \epsilon;$

while $(t_1\sigma \neq t_2\sigma)$ **do**

end while

Algoritme: $\text{unifiser}(t_1, t_2)$

$\sigma := \epsilon;$

while $(t_1\sigma \neq t_2\sigma)$ **do**

 velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma;$

end while

Algoritme: $\text{unifiser}(t_1, t_2)$

$\sigma := \epsilon;$

while $(t_1\sigma \neq t_2\sigma)$ **do**

 velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma;$

if (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**

end if

end while

Algoritme: $\text{unifiser}(t_1, t_2)$

$\sigma := \epsilon;$

while $(t_1\sigma \neq t_2\sigma)$ **do**

 velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma;$

if (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**

 return *“ikke unifiserbare”*;

end if

end while

Algoritme: $\text{unifiser}(t_1, t_2)$ $\sigma := \epsilon;$ **while** $(t_1\sigma \neq t_2\sigma)$ **do**velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;**if** (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if** $x :=$ den av k_1, k_2 som er variabel (hvis begge er, så velg én); $t :=$ den av k_1, k_2 som ikke er x ;**end while**

Algoritme: unifiser(t_1, t_2) $\sigma := \epsilon;$ **while** ($t_1\sigma \neq t_2\sigma$) **do**velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;**if** (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**return "*ikke unifiserbare*";**end if** $x :=$ den av k_1, k_2 som er variabel (hvis begge er, så velg én); $t :=$ den av k_1, k_2 som ikke er x ;**if** (x forekommer i t) **then****end if****end while**

Algoritme: unifiser(t_1, t_2) $\sigma := \epsilon;$ **while** ($t_1\sigma \neq t_2\sigma$) **do**velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;**if** (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if** $x :=$ den av k_1, k_2 som er variabel (hvis begge er, så velg én); $t :=$ den av k_1, k_2 som ikke er x ;**if** (x forekommer i t) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if****end while**

Algoritme: unifiser(t_1, t_2) $\sigma := \epsilon;$ **while** ($t_1\sigma \neq t_2\sigma$) **do**velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;**if** (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if** $x :=$ den av k_1, k_2 som er variabel (hvis begge er, så velg én); $t :=$ den av k_1, k_2 som ikke er x ;**if** (x forekommer i t) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if** $\sigma := \sigma\{t/x\};$ **end while**

Algoritme: unifiser(t_1, t_2) $\sigma := \epsilon;$ **while** ($t_1\sigma \neq t_2\sigma$) **do**velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;**if** (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if** $x :=$ den av k_1, k_2 som er variabel (hvis begge er, så velg én); $t :=$ den av k_1, k_2 som ikke er x ;**if** (x forekommer i t) **then**return *“ikke unifiserbare”*;**end if** $\sigma := \sigma\{t/x\};$ **end while**return σ ;

Egenskaper ved unifiseringsalgoritmen

Egenskaper ved unifiseringsalgoritmen

- Hvis termene t_1 og t_2 er unifiserbare, så returnerer algoritmen en mest generell unifikator for t_1 og t_2 .

Egenskaper ved unifiseringsalgoritmen

- Hvis termene t_1 og t_2 er unifiserbare, så returnerer algoritmen en mest generell unifikator for t_1 og t_2 .
- Denne mgu-en er en representant for alle andre unifikatorer for t_1 og t_2 .

Egenskaper ved unifiseringsalgoritmen

- Hvis termene t_1 og t_2 er unifiserbare, så returnerer algoritmen en mest generell unifikator for t_1 og t_2 .
- Denne mgu-en er en representant for alle andre unifikatorer for t_1 og t_2 .
- Hvis t_1 og t_2 **ikke** er unifiserbare, så returnerer algoritmen “*ikke unifiserbare*”.