INF3170 – Logikk

Forelesning 11: Automatisk bevissøk II – fri-variabel sekventkalkyle og sunnhet

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

24. april 2006

Dagens plan

1. Automatisk bevissøk II
   - Fri-variabel sekventkalkyle
   - Semantikk
   - Sunnhet

Fri-variabel sekventkalkyle

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.

$$\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax$$

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.

$$\frac{\exists y L u y \vdash L a v}{\forall x \exists y L x y \vdash \exists x L a x}$$

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.

$$\frac{\exists y L u y \vdash L a v}{\forall x \exists y L x y \vdash \exists x L a x}$$

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.

$$\cfrac{\cfrac{Lufu \vdash Lav}{\exists y Luy \vdash Lav}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax}$$

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\dfrac{\dfrac{Lufu \vdash Lav}{\exists y Luy \vdash Lav}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax}$$

Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en fri variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere Skolemtermer.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} u/a, v/fa \\ Lufu \vdash Lav \end{array}}{\exists y Luy \vdash Lav}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax}$$

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- *tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og*

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- *tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og*
- *tellbart uendelig mange Skolemfunksjoner av hver aritet,*

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- *tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og*
- *tellbart uendelig mange Skolemfunksjoner av hver aritet,*

slik at symbolene i $\mathcal{S}$ er forskjellig fra symbolene i $\mathcal{L}$.

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer Skolemkonstanter og Skolemfunksjoner.
- Disse symbolene er nye symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er utvidet med slike Skolemsymboler.

Definisjon (Utvidet språk)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av

- *tellbart uendelig mange Skolemkonstanter, og*
- *tellbart uendelig mange Skolemfunksjoner av hver aritet,*

slik at symbolene i $\mathcal{S}$ er forskjellig fra symbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$ være språket vi får ved å utvide $\mathcal{L}$ med konstant- og funksjonssymbolene i $\mathcal{S}$.

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen* $\Gamma \vdash \Delta$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\text{sko}}$.*

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\text{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists x Px$

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathrm{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists x Px$

Lukkede sekventer

Sekventer

Definisjon (Sekvent)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.

- *En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall xPx \vdash Pa$
2. $\forall x \exists yLxy \vdash \exists x \forall yLyx$
3. $\forall xPxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists xPx$

Lukkede sekventer

Nr. 1 og 2 er *lukkede* sekventer.

γ-reglene

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK *er:*

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \, \mathrm{L}\forall$$

u er en ny fri variabel

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

u er en ny fri variabel

γ-reglene

Definisjon (γ-regler i fri-variabel LK)

γ-reglene i fri-variabel LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

u er en ny fri variabel

- Med *ny* mener vi her at u ikke må forekomme fritt i utledningen fra før.

δ-reglene

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK *er:*

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ*-reglene i fri-variabel* LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\exists$$

f er en ny Skolemfunksjon

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\exists$$

f er en ny Skolemfunksjon

$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

f er en ny Skolemfunksjon

$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

δ-reglene

Definisjon (δ-regler i fri-variabel LK)

δ-reglene i fri-variabel LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\,\mathsf{R}\forall$$

f er en ny Skolemfunksjon
$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

- Med *ny* mener vi her at f ikke må forekomme i utledningen fra før.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

- γ*- og* δ*-reglene for frie variable*

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

- γ*- og* δ*-reglene for frie variable, og*
- α*- og* β*-reglene fra utsagnslogisk* LK*.*

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

- γ- *og* δ-*reglene for frie variable, og*
- α- *og* β-*reglene fra utsagnslogisk* LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

- γ- *og* δ-*reglene for frie variable, og*
- α- *og* β-*reglene fra utsagnslogisk* LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

- γ*- og* δ*-reglene for frie variable, og*
- α*- og* β*-reglene fra utsagnslogisk* LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.
  - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

- γ*- og* δ*-reglene for frie variable, og*
- α*- og* β*-reglene fra utsagnslogisk* LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.
  - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
- Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!

Slutningsregler og utledninger

Definisjon (Slutningsreglene i fri-variabel LK)

Slutningsreglene i fri-variabel LK *er*

- γ*- og* δ*-reglene for frie variable, og*
- α*- og* β*-reglene fra utsagnslogisk* LK.

- Mengden av fri-variabel utledninger defineres induktivt:
  - Basismengden er mengden av *lukkede* sekventer.
  - Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
- Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!
- Formlene i de andre sekventene i en utledning behøver imidlertid ikke være lukkede.

Eksempler på fri-variabel utledninger

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\forall x Px \vdash \exists x Px$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\forall x Px \vdash \exists x Px$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\forall x Px, P\,u \vdash \exists x Px}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\ \mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\ \mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\ \mathrm{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\forall x Px \vdash Pa \land Pb$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\forall x Px \vdash Pa \qquad \forall x Px \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\mathrm{R}\wedge$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\forall x Px \vdash Pa \qquad \forall x Px \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathrm{R}\land$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\text{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\text{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, P{\color{red}u} \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\text{L}\forall \qquad \forall x Px \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\text{R}\land$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \forall x Px \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\text{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\text{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\text{L}\forall \qquad \cfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\text{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\text{R}\land$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\cfrac{\cfrac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx}\,\mathrm{R}\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx}\,\mathrm{L}\forall$$

R∃ kan ikke introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\cfrac{\cfrac{\forall xPx, Pu \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa}\,\mathrm{L}\forall \qquad \cfrac{\forall xPx, Pv \vdash Pb}{\forall xPx \vdash Pb}\,\mathrm{L}\forall}{\forall xPx \vdash Pa \land Pb}\,\mathrm{R}\land$$

L∀ i høyre og venstre gren kan ikke introdusere den samme variabelen, av samme grunn som over.

Eksempler på fri-variabel utledninger

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vee Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\ \mathsf{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\ \mathrm{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx \qquad \forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx \qquad \forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{R}\forall \qquad \forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall \qquad \forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \color{red}{\forall xQx}}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\forall$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$
\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall}{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\forall}\,\mathrm{L}\lor
$$

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,R\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,R\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,L\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,L\forall$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. ett som ikke forekommer i utledningen fra før.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall}
{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\lor
}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\forall
$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. ett som ikke forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan R$\forall$ i høyre gren ikke introdusere den samme Skolemkonstanten som R$\forall$ i venstre gren.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\forall$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. ett som ikke forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan R$\forall$ i høyre gren ikke introdusere den samme Skolemkonstanten som R$\forall$ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ-reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$
\dfrac{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{R}\forall
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{R}\forall
}{
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\forall
}\,\mathrm{L}\lor
$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et nytt Skolemsymbol, dvs. ett som ikke forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan R$\forall$ i høyre gren ikke introdusere den samme Skolemkonstanten som R$\forall$ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ-reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.
- I utledningen over vet vi ikke hvilke symboler som forekommer i konklusjonen før vi har instansiert u!

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\,\mathrm{R}\forall}{\vdash Px \to \forall x Px}\,\mathrm{R}\!\to$$

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\ \mathrm{R}\forall}{\vdash Px \to \forall x Px}\ \mathrm{R}{\to}$$

Rotsekventen er ikke lukket.

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\cfrac{\cfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\;\mathrm{R}\forall}{\vdash P{\color{red}x} \to \forall x Px}\;\mathrm{R}{\to}$$

Rotsekventen er ikke lukket.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x\exists y Pxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x\forall y Pyx}{\forall x\exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x\forall y Pyx}\;\mathrm{R}\forall}{\forall x\exists y Pxy, Puf(u) \vdash \exists x\forall y Pyx}\;\mathrm{R}\exists}{\forall x\exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x\forall y Pyx}\;\mathrm{L}\exists}{\forall x\exists y Pxy \vdash \exists x\forall y Pyx}\;\mathrm{L}\forall$$

Eksempel på objekter som *ikke* er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\,\mathrm{R}\forall}{\vdash P{\color{red}x} \to \forall x Px}\,\mathrm{R}\!\to$$

Rotsekventen er ikke lukket.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash P{\color{red}f}(v)v, \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x \forall y Pyx}\,\mathrm{R}\forall}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \exists x \forall y Pyx}\,\mathrm{R}\exists}{\forall x \exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x \forall y Pyx}\,\mathrm{L}\exists}{\forall x \exists y Pxy \vdash \exists x \forall y Pyx}\,\mathrm{L}\forall$$

De to δ-slutningene introduserer det samme Skolem-funksjonssymbolet.

Lukkede utledninger

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- *σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π*

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ *lukker en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *i* π *hvis det finnes atomære formler* $\varphi \in \Gamma$ *og* $\psi \in \Delta$

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- *σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes atomære formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.*

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å lukke en utledning.

Definisjon (Lukking)

La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- *σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes atomære formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.*
- *σ lukker π hvis σ lukker alle løvsekventene i π.*

Bevis

Bevis

Definisjon (Bevis)

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et *bevis* *for en sekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *er par* $\langle \pi, \sigma \rangle$ *der*

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *er par* $\langle \pi, \sigma \rangle$ *der*

- π *er en utledning med* $\Gamma \vdash \Delta$ *som rotsekvent*

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- *π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og*
- *σ er en grunn substitusjon som lukker π.*

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et bevis *for en sekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *er par* $\langle \pi, \sigma \rangle$ *der*

- π *er en utledning med* $\Gamma \vdash \Delta$ *som rotsekvent, og*
- σ *er en* grunn *substitusjon som lukker* π.

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være grunn, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.

Bevis

Definisjon (Bevis)

Et bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- *π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og*
- *σ er en grunn substitusjon som lukker π.*

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være grunn, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.
- Senere skal vi se at vi kan lempe på dette kravet og tillate lukkende substitusjoner som ikke er grunne.

Eksempel (1)

Eksempel (1)

La π *være utledningen*

$$\dfrac{\dfrac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx}\,\mathsf{R}\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx}\,\mathsf{L}\forall$$

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx}\,\mathsf{R}\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx}\,\mathsf{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

Eksempel (1)

La π *være utledningen*

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ *lukker løvsekventen:* $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.

Eksempel (1)

La π *være utledningen*

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\ \mathsf{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\ \mathsf{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ *lukker løvsekventen:* $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.
- σ *lukker* π, *siden den lukker den eneste løvsekventen.*

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- *σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.*
- *σ lukker π, siden den lukker den eneste løvsekventen.*
- *Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$.*

Eksempel (1)

La π være utledningen

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\;\mathrm{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\;\mathrm{L}\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- *σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.*
- *σ lukker π, siden den lukker den eneste løvsekventen.*
- *Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$.*

Merk:

Slik vi har definert fri-variabel LK vil f.eks. $\langle \pi, \sigma' \rangle$ der $\sigma' = \{v/u\}$ ikke være et bevis, siden σ' ikke er grunn.

Eksempel (2)

Eksempel (2)

La π *være utledningen*

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathrm{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathrm{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

Eksempel (2)

La π *være utledningen*

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathrm{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathrm{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ *lukker venstre løvsekvent:* $(Pu)\sigma = Pa$.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathrm{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\mathrm{R}\wedge$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ *lukker venstre løvsekvent:* $(Pu)\sigma = Pa$.
- σ *lukker høyre løvsekvent:* $(Pv)\sigma = Pb$.

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathrm{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathrm{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ *lukker venstre løvsekvent:* $(Pu)\sigma = Pa$.
- σ *lukker høyre løvsekvent:* $(Pv)\sigma = Pb$.
- σ *lukker* π*, siden den lukker begge løvsekventene.*

Eksempel (2)

La π være utledningen

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \cfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- *σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.*
- *σ lukker høyre løvsekvent: $(Pv)\sigma = Pb$.*
- *σ lukker π, siden den lukker begge løvsekventene.*
- *Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash Pa \land Pb$.*

Eksempel (3)

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall
\qquad
\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{R}\forall}
{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\lor
}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx}\,\mathrm{L}\forall
$$

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{R}\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\forall$$

- *Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b samtidig.*

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall$$

- *Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b samtidig.*
- *Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx$ basert på utledningen π.*

Eksempel (3)

La π være utledningen

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,R\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,R\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,L\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,L\forall$$

- *Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b samtidig.*
- *Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx$ basert på utledningen π.*
- *Er rotsekventen gyldig...?*

1. Automatisk bevissøk II
   - Fri-variabel sekventkalkyle
   - Semantikk
   - Sunnhet

Semantikk

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke variabeltilordninger for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.

Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke variabeltilordninger for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.
- Vi definerer så rekursivt hvordan vi kan tolke en vilkårlig førsteordens formel i en modell under en gitt variabeltilordning.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning *for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.*

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning *for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.*

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, ...

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, ...
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, ...

Variabeltilordninger

Definisjon (Variabeltilordning)

La $\mathcal{M}$ være en modell. En variabeltilordning for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, ...
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, ...
  - ...

Tolkning av termer med frie variable

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} =$ *for en variabel x*

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} =$ *for et konstantsymbol* c

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* c

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* c
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} =$ *for en funksjonsterm*

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon (Tolkning av termer med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel* x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol* c
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ *for en funksjonsterm*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ *være et førsteordens språk og* $\mathcal{M}$ *en modell for* $\mathcal{L}$. *Anta at* $\mathcal{M}$ *er en* $\mathcal{L}(\mathcal{M})$*-modell.*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ;

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon (Tolkning av formler med frie variable)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.

- *Atomære fml:* $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \dots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ *hvis det ikke er tilfelle at* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *og* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for alle* a *i* $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x \varphi$ *hvis* $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for minst en* a *i* $|\mathcal{M}|$.

Eksempel I

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{ \quad \}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle$

$\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle$

$\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle \}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

Liker$^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle,$

$\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

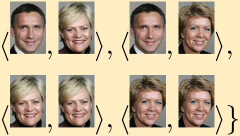
- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{$  $\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle,$

$\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}, \mu_2}, x^{\mathcal{M}, \mu_1} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle,$

$\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

- **Ja**, både $e =$  og $e =$ .

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle,$

$\langle$, $\rangle, \langle$, $\rangle\}$

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  ,  ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle,$

$\langle$  ,  $\rangle, \langle$  ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

Eksempel II

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathrm{Liker}(y, x)$?

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\mathrm{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$  $\rangle\},$

$\langle$  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

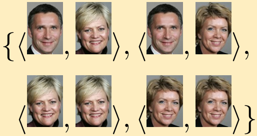
- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$



Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$

$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$ , ,  $\}$

$\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle,$

$\langle$ ,  $\rangle, \langle$ ,  $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \text{Liker}(\bar{e}, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$  $\rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}}$

- **Nei**, ingen slik $e \in |\mathcal{M}|$ finnes.

Falsifiserbarhet

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en motmodell, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en motmodell, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som ikke er lukket.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en lukket sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.
- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som ikke er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en motmodell, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som ikke er lukket.
- Vi ønsker at en motmodell til en sekvent skal være en motmodell *uavhengig* av hvordan vi tolker de frie variablene.

Falsifiserbarhet II

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.
- Men hvis vi tolker x som a, ser vi at $\mathcal{M}'$ ikke lenger er en motmodell.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.
- Men hvis vi tolker x som a, ser vi at $\mathcal{M}'$ ikke lenger er en motmodell.
- Her finnes en variabeltilordning som gjør at $\mathcal{M}'$ ikke er en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet III

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne*

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{M}, \mu$ *gjør alle formlene i* Γ *sanne, og*
- $\mathcal{M}, \mu$ *gjør alle formlene i* Δ *usanne.*

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne, og*
- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Δ usanne.*

En sekvent er

- *falsifiserbar hvis den har en motmodell*

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for hver enkelt variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon (Falsifiserbar sekvent)

En modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:

- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne, og*
- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Δ usanne.*

En sekvent er

- *falsifiserbar hvis den har en motmodell*
- *gyldig hvis den ikke er falsifiserbar*

1. Automatisk bevissøk II
   - Fri-variabel sekventkalkyle
   - Semantikk
   - Sunnhet

Sunnhet

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har ikke denne egenskapen!

Sunnhet

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har ikke denne egenskapen!

Merk

Vi vil heretter referere til førsteordens LK *uten frie variable som grunn* LK *og førsteordens* LK *med frie variable som fri-variabel* LK.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er ikke falsifiserbare. (Prøv!)

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er ikke falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene ikke er det!

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er falsifiserbar.

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er falsifiserbar.
- Vi skal så vise ved induksjon at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er falsifiserbar.
- Vi skal så vise ved induksjon at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.
- Når vi har denne egenskapen, er resten av sunnhetsbeviset for fri-variabel LK tilsvarende beviset for den grunne kalkylen.

Falsifiserbarhet

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\bot$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\perp$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$.*

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis*

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne*

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $\mathsf{G}^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $\mathsf{G}^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $\mathsf{G}^{\top}$ sanne, og*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $\mathsf{G}^{\perp}$ usanne.*

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\perp$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^\top$ sanne, og*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^\perp$ usanne.*
- *$\mathcal{M}$ falsifiserer π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$*

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\perp$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^\top$ sanne, og*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^\perp$ usanne.*
- *$\mathcal{M}$ falsifiserer π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$ så finnes en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.*

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^\top$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^\perp$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon (Falsifiserbarhet)

La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ hvis*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^\top$ sanne, og*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^\perp$ usanne.*
- *$\mathcal{M}$ falsifiserer π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$ så finnes en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.*

En utledning er falsifiserbar hvis det finnes en modell som falsifiserer den.

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\cfrac{\cfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:
  - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_1.

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \lor Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:
  - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_1.
  - Hvis $\mu_2(u) = b$, så har vi at den venstre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_2.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

Basistilfelle:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

Basistilfelle:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Anta at rotsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på utledninger.

Basistilfelle:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Anta at rotsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar.
- Da er utledningen falsifiserbar, siden den eneste løvsekventen $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar.

□

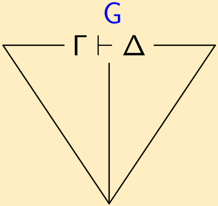
Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

π :

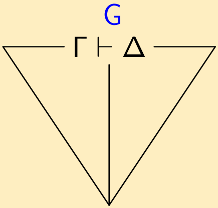


□

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

π :

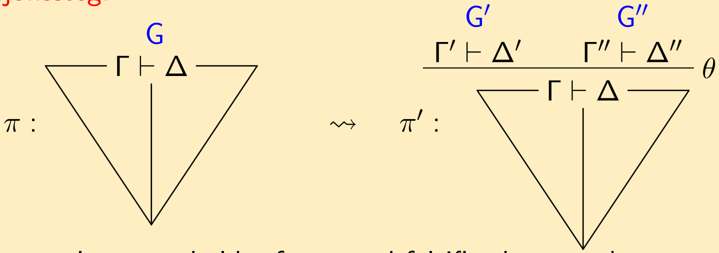


- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.

$\square$

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

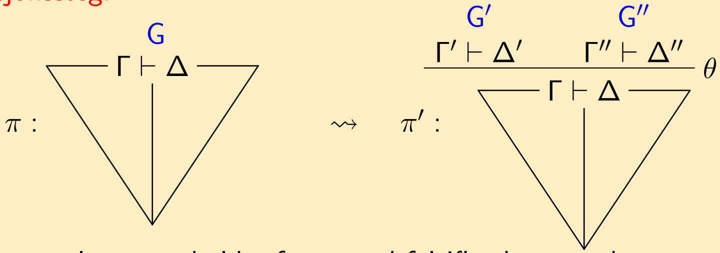


- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.

□

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

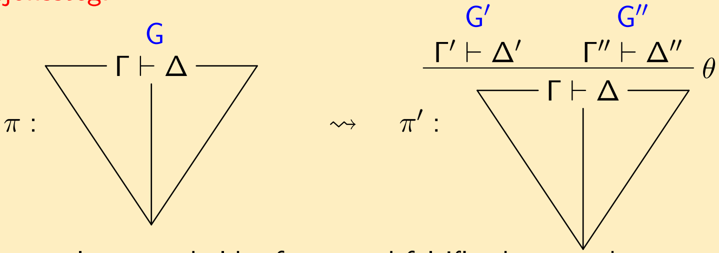


- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.

$\square$

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

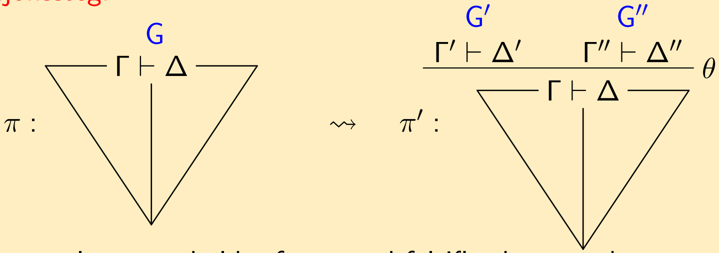


- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.

$\square$

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

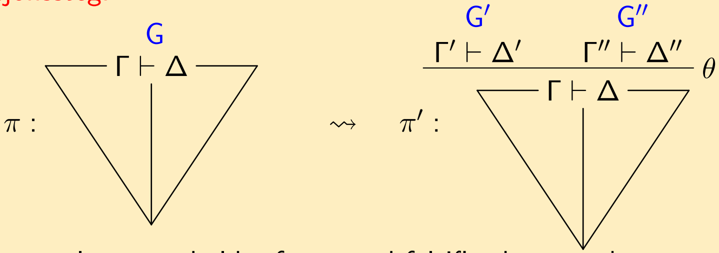


- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.

$\square$

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

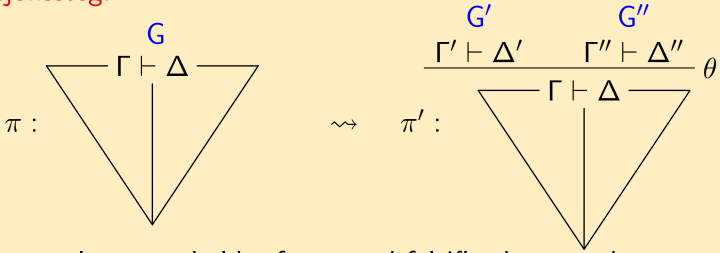


- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:

$\square$

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:

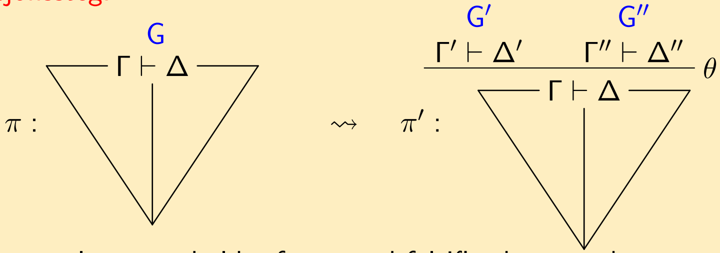


- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:
  1. Den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ er en annen enn G.

$\square$

Bevis (induksjonssteg).

Induksjonssteg:



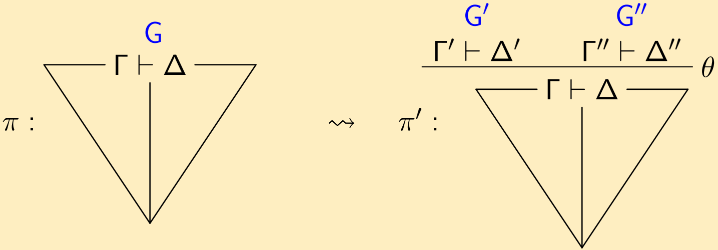
- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:
  1. Den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ er en annen enn G.
  2. Den falsifiserte grenen er G.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 1).

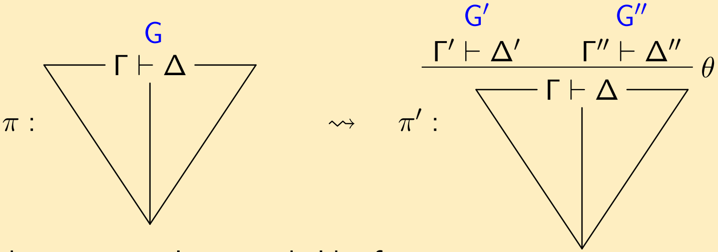
$\square$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 1).



$\square$

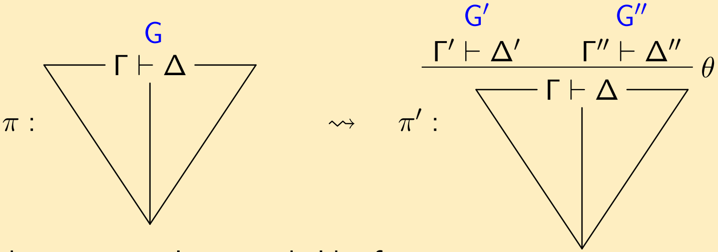
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 1).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.

$\square$

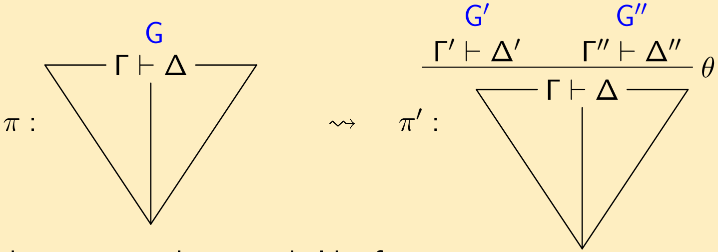
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 1).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.
- Vi har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.

□

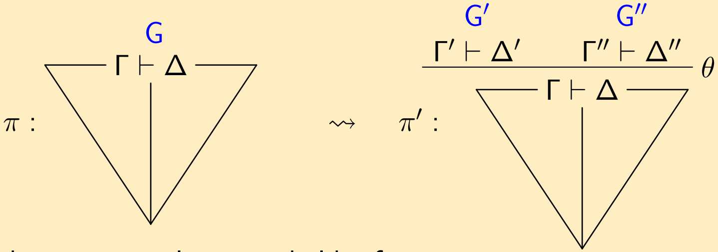
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 1).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.
- Vi har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi har antatt at den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ ikke er G.

□

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 1).



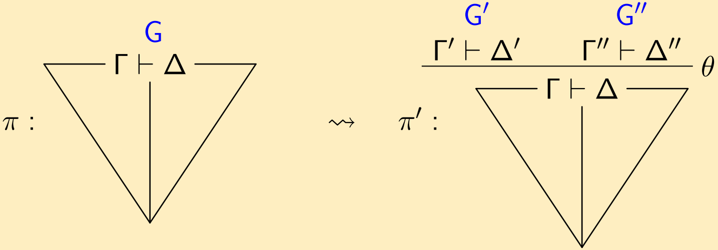
- Vi har antatt at lemmaet holder for π.
- Vi har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi har antatt at den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ ikke er G.
- Da er den falsifiserte grenen i π også en gren i π'.

□

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).

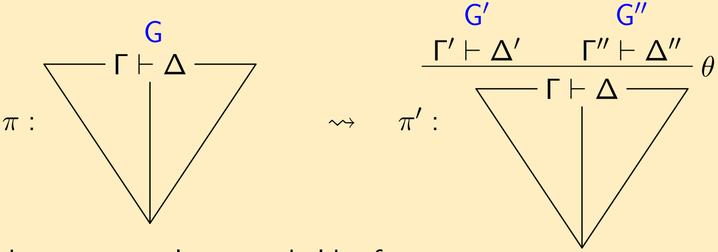
$\square$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).



$\square$

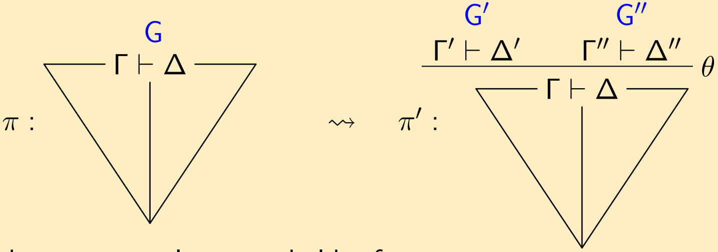
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.

□

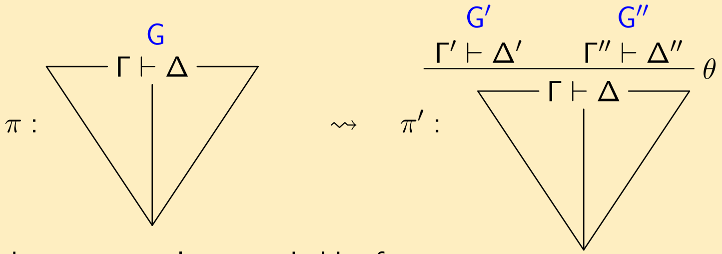
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.
- Vi har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en var.tilordn. μ for $\mathcal{M}$.

$\square$

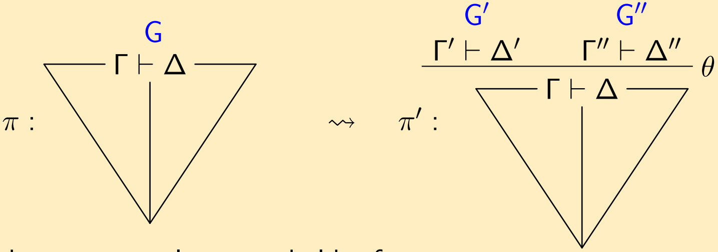
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.
- Vi har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en var.tilordn. μ for $\mathcal{M}$.
- Vi har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

$\square$

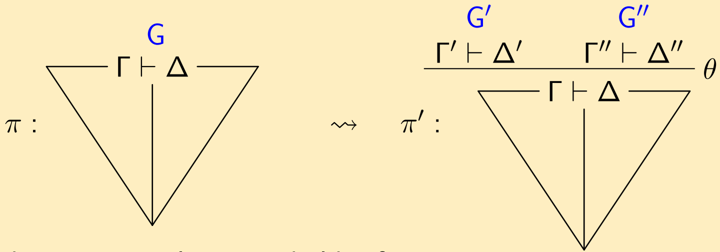
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.
- Vi har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en var.tilordn. μ for $\mathcal{M}$.
- Vi har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Vi må vise at enten G′ eller G″ er falsifiserbar i π'.

□

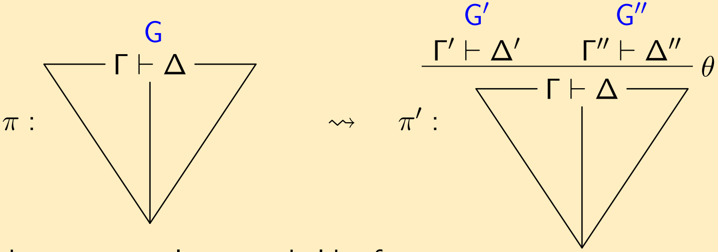
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.
- Vi har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en var.tilordn. μ for $\mathcal{M}$.
- Vi har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Vi må vise at enten G′ eller G″ er falsifiserbar i π'.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.

□

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π.
- Vi har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en var.tilordn. μ for $\mathcal{M}$.
- Vi har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Vi må vise at enten G′ eller G″ er falsifiserbar i π'.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Vi viser argumentet for L$\vee$, L$\forall$ og L$\exists$. De andre reglene blir ukeoppgaver?

$\square$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L$\vee$).

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∨).

$$\dfrac{\overset{\color{blue}{G'}}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{\color{blue}{G''}}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\color{blue}{\Big|\ G}$$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\dfrac{\overset{\color{blue}{G'}}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{\color{blue}{G''}}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

$$\color{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\, \mathrm{L}\vee$$

$$\Big|\; G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∨).

$$\dfrac{\overset{\textcolor{blue}{G'}}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{\textcolor{blue}{G''}}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\vee$$

$$\Big|\ \textcolor{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\color{blue}{G'}\\ \Gamma, A \vdash \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\color{blue}{G''}\\ \Gamma, B \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\vee$$

$$\Big|\ \color{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\dfrac{\overset{\textcolor{blue}{G'}}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \overset{\textcolor{blue}{G''}}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

$$\Big|\ \textcolor{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G$'$ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∨).

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \color{blue}{\mathsf{G}'} & \color{blue}{\mathsf{G}''} \\ \Gamma, A \vdash \Delta & \Gamma, B \vdash \Delta \end{array}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

$$\Big|\ \color{blue}{\mathsf{G}}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G′ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models B$, så er G″ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

□

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\overset{G'}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall$$

$$\Big|\ G$$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\begin{matrix}\color{blue}{G'}\\ \Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

$$\color{blue}{\Big|\, G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\begin{array}{c}G' \\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta \\ \Big| \, G\end{array}} \, \text{L}\forall$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\begin{array}{c}G' \\ \Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

$$\Big|\; G$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\begin{array}{c} \color{blue}{G'} \\ \dfrac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \\ \Big| \color{blue}{G} \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\dfrac{\overset{\mathsf{G}'}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

$$\Big|\ \mathsf{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\begin{array}{c} G' \\ \dfrac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\forall \\ \Big|\ G \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\begin{array}{c} \color{blue}{G'} \\ \dfrac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \\ \Big|\ \color{blue}{G} \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\cfrac{\begin{array}{c}\mathsf{G}' \\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta \\ \Big| \; \mathsf{G}\end{array}} \; \mathrm{L}\forall$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\begin{array}{c} \color{blue}{G'} \\ \dfrac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \\ \Big|\ \color{blue}{G} \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G′ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∀).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\color{blue}{G'}\\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\forall$$

$$\color{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G′ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

□

Steget fra $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$ til $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$ kan vises ved strukturell induksjon på formler. Mulig ukeoppgave...

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\dfrac{\begin{matrix} G' \\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta \end{matrix}}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\exists$$

G

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\dfrac{\overset{\color{blue}{G'}}{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \text{L}\exists$$

$$\color{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\cfrac{\begin{array}{c}\color{blue}{G'}\\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

$$\Big|\ \color{blue}{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{G}'\\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

$$\Big|\; \mathsf{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\begin{array}{c} G' \\ \dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists \\ \Big| \ G \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\begin{array}{c} \color{blue}{G'} \\ \dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \text{L}\exists \\ \color{blue}{G} \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\begin{array}{c} \mathsf{G}' \\ \dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\, \mathsf{L}\exists \\ \Big| \, \mathsf{G} \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\cfrac{\begin{matrix}\color{blue}{G'}\\ \Gamma, \varphi[f(u_1,\ldots,u_n)/x] \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\exists$$

$\color{blue}{G}$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x\varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathsf{G}'\\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\exists$$

$$\mathsf{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n) = e$.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta \quad \mathsf{G}'}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists \qquad \mathsf{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n) = e$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x \varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – L∃).

$$\begin{array}{c} \color{blue}{G'} \\ \dfrac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \text{L}\exists \\ \color{blue}{G} \end{array}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n) = e$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x \varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.
- Påstand: $\mathcal{M}'$ falsifiserer π'. Gjør selv! $\square$

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon.

Lemma

La $\mathcal{M}$ *være en modell, og la* σ *være en grunn substitusjon. La* μ *være en variabeltilordning slik at* $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ *for hver variabel* x *i støtten til* σ*.*

Lemma

La $\mathcal{M}$ *være en modell, og la* σ *være en grunn substitusjon. La* μ *være en variabeltilordning slik at* $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ *for hver variabel* x *i støtten til* σ*. Hvis* φ *er en formel slik at de frie variablene i* φ *er med i støtten til* σ

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ, så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ, så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Bevis.

Ukeoppgave. $\square$

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathrm{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathrm{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathrm{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathrm{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen fri-variabel LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathrm{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathrm{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

$\square$