

Forelesning 11: Automatisk bevissøk II – fri-variabel sekventkalkyle og sunnhet

Christian Mahesh Hansen - 24. april 2006

1 Automatisk bevissøk II

1.1 Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ -slutninger utsettes ved å sette inn en *fri* variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ -slutninger gjør at vi må la δ -slutninger introdusere *Skolemtermer*.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\frac{\frac{u/a, v/fa}{Lufu \vdash Lav}}{\exists y Luy \vdash Lav}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax}$$

Utvidet språk

- δ -slutningene introduserer *Skolemkonstanter* og *Skolemfunksjoner*.
- Disse symbolene er *nye* symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er *utvidet* med slike Skolemsymboler.

Definisjon 1.1 (Utvidet språk). La \mathcal{L} være et førsteordens språk. La \mathcal{S} være en mengde som består av

- tellbart uendelig mange *Skolemkonstanter*, og
- tellbart uendelig mange *Skolemfunksjoner* av hver aritet,

slik at symbolene i \mathcal{S} er forskjellig fra symbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{sko} være språket vi får ved å utvide \mathcal{L} med konstant- og funksjonssymbolene i \mathcal{S} .

Sekventer

Definisjon 1.2 (Sekvent). La \mathcal{L} være et førsteordens språk.

- En *sekvent* er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i \mathcal{L}^{sko} .
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er *lukket* hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.

Sekventer

1. $\forall xPx \vdash Pa$
2. $\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx$
3. $\forall xPxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists xPx$

Lukkede sekventer

Nr. 1 og 2 er *lukkede* sekventer.

γ -reglene

Definisjon 1.3 (γ -regler i fri-variabel LK). γ -reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

u er en ny fri variabel

- Med *ny* mener vi her at u ikke må forekomme fritt i utledningen fra før.

δ -reglene

Definisjon 1.4 (δ -regler i fri-variabel LK). δ -reglene i fri-variabel LK er:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi} R\forall$$

f er en ny Skolemfunksjon

$\vec{u} = u_1, \dots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

- Med *ny* mener vi her at f ikke må forekomme i utledningen fra før.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon 1.5 (Slutningsreglene i fri-variabel LK). Slutningsreglene i fri-variabel LK er

- γ - og δ -reglene for frie variable, og
- α - og β -reglene fra utsagnslogisk LK.
- Mengden av *fri-variabel utledninger* defineres induktivt:
 - *Basismengden* er mengden av lukkede sekventer.

- Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.
- Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!
- Formlene i de andre sekventene i en utledning behøver imidlertid ikke være lukkede.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx, Pv}{\forall xPx, Pu \vdash \exists xPx} R\exists}{\forall xPx \vdash \exists xPx} L\forall$$

$R\exists$ kan *ikke* introdusere u , siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} L\forall \quad \frac{\forall xPx, Pv \vdash Pb}{\forall xPx \vdash Pb} L\forall}{\forall xPx \vdash Pa \wedge Pb} R\wedge$$

$L\forall$ i høyre og venstre gren kan *ikke* introdusere den samme variabelen, av samme grunn som over.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash Pa, \forall xQx}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vdash \forall xPx, \forall xQx} R\forall \quad \frac{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, Qb}{\forall x(Px \vee Qx), Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx} R\forall}{\forall x(Px \vee Qx), Pu \vee Qu \vdash \forall xPx, \forall xQx} L\forall}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash \forall xPx, \forall xQx} L\forall$$

- Vi krever at hver δ -slutning introduserer et *nytt* Skolemsymbol, dvs. ett som *ikke* forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan $R\forall$ i høyre gren *ikke* introdusere den samme Skolemkonstanten som $R\forall$ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ -reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.
- I utledningen over vet vi ikke hvilke symboler som forekommer i konklusjonen før vi har instansiert u !

Eksempel på objekter som ikke er utledninger

~~$$\frac{\frac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall xPx} R\forall}{\vdash Px \rightarrow \forall xPx} R\rightarrow$$~~

Rotsekventen er ikke lukket.

$$\begin{array}{c}
\frac{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x \forall y Pyx} R\forall \\
\frac{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy, Puf(u) \vdash \exists x \forall y Pyx} R\exists \\
\frac{\forall x \exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy \vdash \exists x \forall y Pyx} L\exists \\
\frac{\forall x \exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x \forall y Pyx}{\forall x \exists y Pxy \vdash \exists x \forall y Pyx} L\forall
\end{array}$$

De to δ -slutningene introduserer det samme Skolemfunksjonssymbolet.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å *lukke* en utledning.

Definisjon 1.6 (Lukking). La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.

- σ *lukker* en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes atomære formuler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- σ *lukker* π hvis σ lukker alle løvsekventene i π .

Bevis

Definisjon 1.7 (Bevis). Et *bevis* for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der

- π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og
- σ er en grunn substitusjon som lukker π .
- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være *grunn*, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.
- Senere skal vi se at vi kan lempe på dette kravet og tillate lukkende substitusjoner som ikke er grunne.

Eksempel (1). La π være utledningen

$$\frac{\frac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px} R\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px} L\forall$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.
- σ lukker π , siden den lukker den eneste løvsekventen.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$.

Merk:

Slik vi har definert fri-variabel LK vil f.eks. $\langle \pi, \sigma' \rangle$ der $\sigma' = \{v/u\}$ ikke være et bevis, siden σ' ikke er grunn.

Eksempel (2). La π være utledningen

$$\frac{\frac{\forall x P x, P u \vdash P a}{\forall x P x \vdash P a} \text{L}\forall \quad \frac{\forall x P x, P v \vdash P b}{\forall x P x \vdash P b} \text{L}\forall}{\forall x P x \vdash P a \wedge P b} \text{R}\wedge$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- σ lukker venstre løvsekvent: $(P u)\sigma = P a$.
- σ lukker høyre løvsekvent: $(P v)\sigma = P b$.
- σ lukker π , siden den lukker begge løvsekventene.
- Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x P x \vdash P a \wedge P b$.

Eksempel (3). La π være utledningen

$$\frac{\frac{\forall x (P x \vee Q x), P u \vdash P a, \forall x Q x}{\forall x (P x \vee Q x), P u \vdash \forall x P x, \forall x Q x} \text{R}\forall \quad \frac{\forall x (P x \vee Q x), Q u \vdash \forall x P x, Q b}{\forall x (P x \vee Q x), Q u \vdash \forall x P x, \forall x Q x} \text{R}\forall}{\frac{\forall x (P x \vee Q x), P u \vee Q u \vdash \forall x P x, \forall x Q x}{\forall x (P x \vee Q x) \vdash \forall x P x, \forall x Q x} \text{L}\forall} \text{L}\forall$$

- Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b samtidig.
- Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x (P x \vee Q x) \vdash \forall x P x, \forall x Q x$ basert på utledningen π .
- Er rotsekventen gyldig...?

1.2 Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke *variabeltilordninger* for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.
- Vi definerer så rekursivt hvordan vi kan tolke en vilkårlig førsteordens formel i en modell under en gitt variabeltilordning.

Variabeltilordninger

Definisjon 1.8 (Variabeltilordning). La \mathcal{M} være en modell. En **variabeltilordning** for \mathcal{M} er en funksjon fra mengden av variable til $|\mathcal{M}|$.

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell \mathcal{M} siden den tolker variable som elementer i domenet til \mathcal{M} .
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
 - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1, \mu_1(x_2) = 1, \mu_1(x_3) = 1, \dots$
 - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2, \mu_2(x_2) = 2, \mu_2(x_3) = 2, \dots$
 - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1, \mu_3(x_2) = 2, \mu_3(x_3) = 3, \dots$
 - \dots

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon 1.9 (Tolkning av termer med frie variable). La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Anta at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell. La μ være en variabeltilordning for \mathcal{M} . Tolkningen av en term t i \mathcal{M} under μ , skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ for en variabel x
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ for et konstantsymbol c
- $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ for en funksjonsterm

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon 1.10 (Tolkning av formler med frie variable). La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Anta at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell. La μ være en variabeltilordning for \mathcal{M} . Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er sann i \mathcal{M} under μ ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i \mathcal{M} under μ .

- Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \dots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \dots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

Eksempel I

Modellen \mathcal{M}
 $|\mathcal{M}| = \{\text{[Person 1]}, \text{[Person 2]}, \text{[Person 3]}\}$
 $\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$
 $\{\langle \text{[Person 1]}, \text{[Person 2]} \rangle, \langle \text{[Person 1]}, \text{[Person 3]} \rangle,$
 $\langle \text{[Person 2]}, \text{[Person 3]} \rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1
 $\mu_1(x) = \text{[Person 2]}$

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?

- Fra fri-variabel semantikken:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \text{Liker}(y, x) \\ \Leftrightarrow \\ \text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \text{Liker}(\bar{e}, x) \\ \Leftrightarrow \\ \text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}, \mu_2}, x^{\mathcal{M}, \mu_1} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \\ \text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \\ \text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle e, \text{[Person 2]} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

- **Ja**, både $e = \text{[Person 1]}$ og $e = \text{[Person 2]}$.

Eksempel II

Modellen \mathcal{M}
 $|\mathcal{M}| = \{\text{[Person 1]}, \text{[Person 2]}, \text{[Person 3]}\}$
 $\text{Liker}^{\mathcal{M}} =$
 $\{\langle \text{[Person 1]}, \text{[Person 2]} \rangle, \langle \text{[Person 1]}, \text{[Person 3]} \rangle,$
 $\langle \text{[Person 2]}, \text{[Person 3]} \rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2
 $\mu_2(x) = \text{[Person 1]}$

- Er det slik at $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x)$?

- Fra fri-variabel semantikken:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \text{Liker}(y, x) \\ \Leftrightarrow \\ \text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \text{Liker}(\bar{e}, x) \\ \Leftrightarrow \\ \text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}, \mu_2}, x^{\mathcal{M}, \mu_2} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \\ \text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \\ \text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle e, \text{[Person 1]} \rangle \in \text{Liker}^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

- **Nei**, ingen slik $e \in |\mathcal{M}|$ finnes.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en *lukket* sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
 - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ .

- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som *ikke* er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en *motmodell*, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som *ikke* er lukket.
- Vi ønsker at en motmodell til en sekvent skal være en motmodell *uavhengig* av hvordan vi tolker de frie variablene.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen \mathcal{M} slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil \mathcal{M} være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være \mathcal{M}' slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b , ser vi at \mathcal{M}' oppfyller Px og falsifiserer Pa .
- Men hvis vi tolker x som a , ser vi at \mathcal{M}' ikke lenger er en motmodell.
- Her finnes en variabeltilordning som gjør at \mathcal{M}' ikke er en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell \mathcal{M} er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for *hver enkelt* variabeltilordning for \mathcal{M} .
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon 1.11 (Falsifiserbar sekvent). *En modell \mathcal{M} er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for alle variabeltilordninger μ for \mathcal{M} :*

- \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i Γ sanne, og
- \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i Δ usanne.

En sekvent er

- **falsifiserbar** hvis den har en motmodell
- **gyldig** hvis den ikke er falsifiserbar

1.3 Sunnhet

Definisjon 1.12 (Sunnhet). *En sekventkalkyle er **sunn** dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.*

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har *ikke* denne egenskapen!

Merk. *Vi vil heretter referere til førsteordens LK uten frie variable som grunn LK og førsteordens LK med frie variable som fri-variabel LK.*

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.
 - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så \mathcal{M} gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er *ikke* falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene *ikke* er det!

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β -slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er *falsifiserbar*.
- Vi skal så vise ved induksjon at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.
- Når vi har denne egenskapen, er resten av sunnhetsbeviset for fri-variabel LK tilsvarende beviset for den grunne kalkylen.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
 - G^\top alle formler som forekommer i en antecedent på G , og
 - G^\perp alle formler som forekommer i en succedent på G .

Definisjon 1.13 (Falsifiserbarhet). La π være en fri-variabel utledning, og la \mathcal{M} være en modell.

- Anta at μ er en variabeltilordning for \mathcal{M} . En gren G i π er **falsifisert** av \mathcal{M} under μ hvis
 - \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i G^\top sanne, og
 - \mathcal{M}, μ gjør alle formlene i G^\perp usanne.
- \mathcal{M} **falsifiserer** π hvis for alle variabeltilordninger μ for \mathcal{M} så finnes en gren i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .

En utledning er falsifiserbar hvis det finnes en modell som falsifiserer den.

Falsifiserbar gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ -kopiene ikke vises):

$$\frac{\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- \mathcal{M} falsifiserer π :
 - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av \mathcal{M} under μ_1 .
 - Hvis $\mu_2(u) = b$, så har vi at den venstre grenen er falsifisert av \mathcal{M} under μ_2 .

Lemma 1.1. *Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.*

Bevis. Ved strukturell induksjon på utledninger.

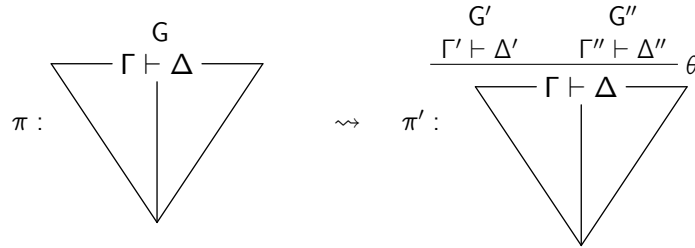
Basistilfelle:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Anta at rotsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar.
- Da er utledningen falsifiserbar, siden den eneste løvsekventen $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar.

□

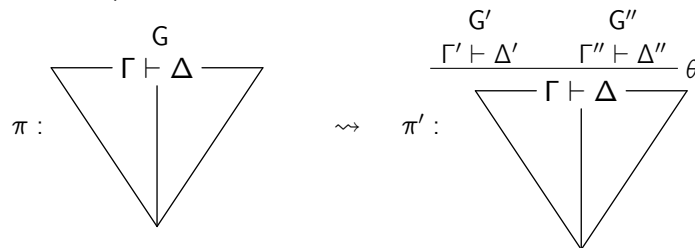
Bevis (induksjonssteg). Induksjonssteg:



- Anta at lemmaet holder for π med falsifiserbar rotsekvent.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La \mathcal{M} være en modell som falsifiserer π .
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for \mathcal{M} .
- Vi får to tilfeller:
 1. Den grenen i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ er en annen enn G.
 2. Den falsifiserte grenen er G.

□

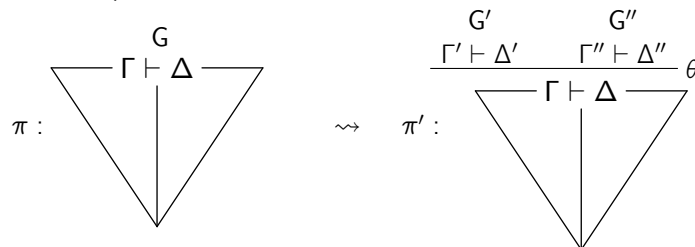
Bevis (induksjonssteg – tilfelle 1).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π .
- Vi har valgt en modell \mathcal{M} som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for \mathcal{M} .
- Vi har antatt at den grenen i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ ikke er G.
- Da er den falsifiserte grenen i π også en gren i π' .

□

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2).



- Vi har antatt at lemmaet holder for π .
- Vi har en modell \mathcal{M} som falsifiserer π og en var.tilordn. μ for \mathcal{M} .

- Vi har antatt at G i π er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Vi må vise at enten G' eller G'' er falsifiserbar i π' .
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Vi viser argumentet for $L\vee$, $L\forall$ og $L\exists$. De andre reglene blir ukeoppgaver?

□

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – $L\vee$).

$$\frac{\frac{G'}{\Gamma, A \vdash \Delta} \quad \frac{G''}{\Gamma, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} L\vee$$

|
G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at \mathcal{M}, μ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ eller $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G' falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models B$, så er G'' falsifisert av \mathcal{M} under μ .

□

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – $L\forall$).

$$\frac{\frac{G'}{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} L\forall$$

|
G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ og at \mathcal{M}, μ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x \varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G' falsifisert av \mathcal{M} under μ .

□

Steget fra $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$ til $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$ kan vises ved strukturell induksjon på formler. Mulig ukeoppgave...

Bevis (induksjonssteg – tilfelle 2 – $L\exists$).

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

| G

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ og at \mathcal{M}, μ gjør alle i Δ usanne.
- La \mathcal{M}' være en modell som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f , som defineres som følger:
 - La $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.
 - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n) = e$.
 - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x \varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \dots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.
- Påstand: \mathcal{M}' falsifiserer π' . Gjør selv!

□

Lemma 1.2. La \mathcal{M} være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ . Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ , så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.

Bevis. Ukeoppgave.

□

Teorem 1.1 (Sunnhet). Sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Bevis. • Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.

- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formuler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

□