INF3170 – Logikk

Forelesning 12: Snitteliminasjon

Herman Ruge Jervell

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

8. mai 2006

Dagens plan

1. Sekventkalkyle
2. Snitteliminasjon

Innhold

1. Sekventkalkyle
   - Regler
   - Ensidig sekventkalkyle
   - Logiske regler
   - Snittregelen
2. Snitteliminasjon
   - Omvending av regler
   - Hovedlemma
   - Snitteliminasjon

Sekventkalkyle

Gerhard Gentzen (1908 - 1945)

- Aksiomer: enkle sekventer som $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral (atomær eller negasjon av atomær)

Sekventkalkyle

Gerhard Gentzen (1908 - 1945)

- Aksiomer: enkle sekventer som $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral (atomær eller negasjon av atomær)
- Strukturelle regler: datastrukturen for sekventer

Sekventkalkyle

Gerhard Gentzen (1908 - 1945)

- Aksiomer: enkle sekventer som $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral (atomær eller negasjon av atomær)
- Strukturelle regler: datastrukturen for sekventer
- Logiske regler: Fire typer α, β, γ, δ

Sekventkalkyle

Gerhard Gentzen (1908 - 1945)

- Aksiomer: enkle sekventer som $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral (atomær eller negasjon av atomær)
- Strukturelle regler: datastrukturen for sekventer
- Logiske regler: Fire typer α, β, γ, δ

Sekventkalkyle

Gerhard Gentzen (1908 - 1945)

- Aksiomer: enkle sekventer som $\Gamma, L, \neg L$ der L er litteral (atomær eller negasjon av atomær)
- Strukturelle regler: datastrukturen for sekventer
- Logiske regler: Fire typer α, β, γ, δ

Velger en versjon av sekventkalkyle som gjør det vanskelige snitteliminasjonsteoremet så enkelt som mulig.

Velger ensidig sekventkalkyle. Enkelt å oversette argumentet til andre systemer.

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 1

- Litteraler: L og $\overline{L}$

Negasjon er definert:

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 1

- Litteraler: L og $\overline{L}$
- Konnektiver: $F \wedge G$ og $F \vee G$

Negasjon er definert:

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 1

- Litteraler: L og $\overline{L}$
- Konnektiver: $F \wedge G$ og $F \vee G$
- Kvantorer: $\forall x.Fx$ og $\exists x.Fx$

Negasjon er definert:

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 1

- Litteraler: L og $\overline{L}$
- Konnektiver: $F \wedge G$ og $F \vee G$
- Kvantorer: $\forall x.Fx$ og $\exists x.Fx$

Negasjon er definert:

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{F}} &= F \\
\overline{F \wedge G} &= \overline{F} \vee \overline{G} \\
\overline{F \vee G} &= \overline{F} \wedge \overline{G} \\
\overline{\forall x.Fx} &= \exists x.\overline{Fx} \\
\overline{\exists x.Fx} &= \forall x.\overline{Fx}
\end{aligned}
$$

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 1

- Litteraler: L og $\overline{L}$
- Konnektiver: $F \wedge G$ og $F \vee G$
- Kvantorer: $\forall x.Fx$ og $\exists x.Fx$

Negasjon er definert:

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{F}} &= F \\
\overline{F \wedge G} &= \overline{F} \vee \overline{G} \\
\overline{F \vee G} &= \overline{F} \wedge \overline{G} \\
\overline{\forall x.Fx} &= \exists x.\overline{Fx} \\
\overline{\exists x.Fx} &= \forall x.\overline{Fx}
\end{aligned}
$$

Skriver $\neg F$ for $\overline{F}$

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 2

Lengden av en formel er gitt ved

- Litteraler: $\ell(L) = 1$

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 2

Lengden av en formel er gitt ved

- Litteraler: $\ell(L) = 1$
- Konnektiver: $\ell(F \wedge G) = \ell(F \vee G) = 1 + \max(\ell(F), \ell(G))$

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 2

Lengden av en formel er gitt ved

- Litteraler: $\ell(L) = 1$
- Konnektiver: $\ell(F \wedge G) = \ell(F \vee G) = 1 + \max(\ell(F), \ell(G))$
- Kvantorer: $\ell(\forall x.Fx) = \ell(\exists x.Fx) = 1 + \ell(Fx)$

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 2

Lengden av en formel er gitt ved

- Litteraler: $\ell(L) = 1$
- Konnektiver: $\ell(F \wedge G) = \ell(F \vee G) = 1 + \max(\ell(F), \ell(G))$
- Kvantorer: $\ell(\forall x.Fx) = \ell(\exists x.Fx) = 1 + \ell(Fx)$

Ensidig sekventkalkyle

Språket – 2

Lengden av en formel er gitt ved

- Litteraler: $\ell(L) = 1$
- Konnektiver: $\ell(F \wedge G) = \ell(F \vee G) = 1 + \max(\ell(F), \ell(G))$
- Kvantorer: $\ell(\forall x.Fx) = \ell(\exists x.Fx) = 1 + \ell(Fx)$

Sekvent – endelig bag (multiset) av formler. Skrives Γ og Γ, F ....

Ensidig sekventkalkyle

Logiske regler

Aksiom er

$$\Gamma, L, \neg L$$

der L er litteral.De logiske reglene er

Ensidig sekventkalkyle

Logiske regler

Aksiom er

$$\Gamma, L, \neg L$$

der L er litteral.De logiske reglene er

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}\ \alpha$$

Ensidig sekventkalkyle

Logiske regler

Aksiom er

$$\Gamma, L, \neg L$$

der L er litteral.De logiske reglene er

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}\ \alpha \qquad \frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}\ \beta$$

Ensidig sekventkalkyle

Logiske regler

Aksiom er

$$\Gamma, L, \neg L$$

der L er litteral.De logiske reglene er

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}\ \alpha \qquad \frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}\ \beta$$

$$\frac{\Gamma, \exists x.Fx, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx}\ \gamma$$

Ensidig sekventkalkyle

Logiske regler

Aksiom er

$$\Gamma, L, \neg L$$

der L er litteral.De logiske reglene er

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G}\ \alpha \qquad \frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}\ \beta$$

$$\frac{\Gamma, \exists x.Fx, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx}\ \gamma \qquad \frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx}\ \delta$$

Regel δ oppfyller egenvariabelbetingelse.

Ensidig sekventkalkyle

Strukturelle regler

Den eneste strukturelle regelen er kontraksjon

$$\frac{\Gamma, F, F}{\Gamma, F}$$

Siden sekventer er bager, så kan vi bytte om på rekkefølgen av formler i sekventer uten videre – de representerer samme bag. Ved bruk av kontraksjon kan vi forenkle formuleringen av noen av reglene. Det er f eks vanlig å ha i stedet for regel γ

$$\frac{\Gamma, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx}\ \gamma'$$

men da glemmer en fort at regel γ skal gi en prosess der vi fra $\exists x.Fx$ kan etter hvert produsere alle instanser Ft når vi falsifiserer formelen.

Snitt

Viktigste avledete regel

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, \neg F}{\Gamma}\ \text{Snitt}$$

F kalles snittformelen.

Snitt

Viktigste avledete regel

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, \neg F}{\Gamma}\ \mathrm{Snitt}$$

F kalles snittformelen. Observer

- Dette er ikke en av de vanlige reglene

Snitt

Viktigste avledete regel

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, \neg F}{\Gamma} \text{ Snitt}$$

F kalles snittformelen. Observer

- Dette er ikke en av de vanlige reglene
- Snittregelen følger den intenderte meningen med sekventer

Snitt

Viktigste avledete regel

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, \neg F}{\Gamma} \text{ Snitt}$$

F kalles snittformelen. Observer

- Dette er ikke en av de vanlige reglene
- Snittregelen følger den intenderte meningen med sekventer
- Vansker med en mekanisering av snitt

Snitt

Viktigste avledete regel

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, \neg F}{\Gamma}\ \text{Snitt}$$

F kalles snittformelen. Observer

- Dette er ikke en av de vanlige reglene
- Snittregelen følger den intenderte meningen med sekventer
- Vansker med en mekanisering av snitt
- Må gjette på snittformel

Snitt

Viktigste avledete regel

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, \neg F}{\Gamma}\ \mathrm{Snitt}$$

F kalles snittformelen. Observer

- Dette er ikke en av de vanlige reglene
- Snittregelen følger den intenderte meningen med sekventer
- Vansker med en mekanisering av snitt
- Må gjette på snittformel

Snitt

Viktigste avledete regel

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, \neg F}{\Gamma}\ \text{Snitt}$$

F kalles snittformelen. Observer

- Dette er ikke en av de vanlige reglene
- Snittregelen følger den intenderte meningen med sekventer
- Vansker med en mekanisering av snitt
- Må gjette på snittformel

Snittregelen ble innført av Gerhard Gentzen. Vi skal se at vi kan eliminere bruk av snitt, men mot at vi får en voldsom økning av størrelsen på derivasjonen. Dette er hovedtemaet i denne forelesningen.

Snitt

Varianter av Snitt

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ Modus ponens}$$

Snitt

Varianter av Snitt

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ Modus ponens}$$

$$\frac{\textbf{Antagelse} \rightarrow \textbf{Lemma} \quad \textbf{Antagelse}, \textbf{Lemma} \rightarrow \textbf{Teorem}}{\textbf{Antagelse} \rightarrow \textbf{Teorem}}$$

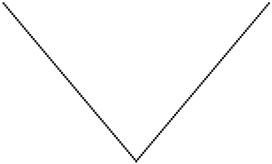
Derivasjoner

Trær

Se på premissene og konklusjonen i våre regler.

- Den aktive formelen er den som blir endret
- Ekstraformlene i konklusjonen finnes også i premissene
- Gitt en formel – vi kan spore forekomstene av formelen opp i derivasjonen gjennom ekstraformler inntil den ender enten opp som aktiv formel eller som aksiom
- Tråd – en sporing av slike forekomster av samme formel

Gitt en formel i konklusjonen av en derivasjon



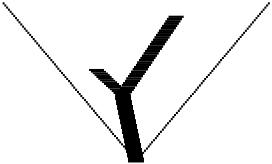
Derivasjoner

Trær

Se på premissene og konklusjonen i våre regler.

- Den aktive formelen er den som blir endret
- Ekstraformlene i konklusjonen finnes også i premissene
- Gitt en formel – vi kan spore forekomstene av formelen opp i derivasjonen gjennom ekstraformler inntil den ender enten opp som aktiv formel eller som aksiom
- Tråd – en sporing av slike forekomster av samme formel

Gitt en formel i konklusjonen av en derivasjon



Her har vi markert tråden.

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ
- Graden g : alle snittformler er av lengde $\leq g$

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ
- Graden g : alle snittformler er av lengde $\leq g$
- Høyden h : derivasjonen har høyde $\leq h$ (høyde $=$ høyden av derivasjonstreet)

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ
- Graden g : alle snittformler er av lengde $\leq g$
- Høyden h : derivasjonen har høyde $\leq h$ (høyde $=$ høyden av derivasjonstreet)

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ
- Graden g : alle snittformler er av lengde $\leq g$
- Høyden h : derivasjonen har høyde $\leq h$ (høyde $=$ høyden av derivasjonstreet)

$$D \vdash \Gamma[g^-, h^-]$$

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ
- Graden g : alle snittformler er av lengde $\leq g$
- Høyden h : derivasjonen har høyde $\leq h$ (høyde $=$ høyden av derivasjonstreet)

$$D \vdash \Gamma[g^-, h^-]$$

- alle snittformler er av lengde $< g$

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ
- Graden g : alle snittformler er av lengde $\leq g$
- Høyden h : derivasjonen har høyde $\leq h$ (høyde $=$ høyden av derivasjonstreet)

$$D \vdash \Gamma[g^-, h^-]$$

- alle snittformler er av lengde $< g$
- derivasjonen har høyde $< h$

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ
- Graden g : alle snittformler er av lengde $\leq g$
- Høyden h : derivasjonen har høyde $\leq h$ (høyde $=$ høyden av derivasjonstreet)

$$D \vdash \Gamma[g^-, h^-]$$

- alle snittformler er av lengde $< g$
- derivasjonen har høyde $< h$

Kompleksitet

Grad og høyde av derivasjoner

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- D er en derivasjon av sekventen Γ
- Graden g : alle snittformler er av lengde $\leq g$
- Høyden h : derivasjonen har høyde $\leq h$ (høyde = høyden av derivasjonstreet)

$$D \vdash \Gamma[g^-, h^-]$$

- alle snittformler er av lengde $< g$
- derivasjonen har høyde $< h$

og varianter der vi utelater D eller kombinasjoner av g, g^- og h, h^-

Avledete regler

Vanlige og enkle

En regel

$$\frac{\Gamma}{\overline{\Delta}}$$

er en (vanlig) avledet regel om

$$\vdash \Gamma \quad \Rightarrow \quad \vdash \Delta$$

Avledete regler

Vanlige og enkle

En regel

$$\frac{\Gamma}{\overline{\Delta}}$$

er en (vanlig) avledet regel om

$$\vdash \Gamma \quad \Rightarrow \quad \vdash \Delta$$

og en enkel avledet regel om

$$\vdash \Gamma[g, h] \quad \Rightarrow \quad \vdash \Delta[g, h]$$

Dette er litt forskjellig definisjon en den i forelesningene.

Avledete regler

Et hygienisk lemma – 1

Lemma

La $\mathcal{V}$ være en mengde variable og anta $D \vdash \Gamma[g, h]$. Da finnes derivasjon D' uten bruk av egenvariable fra $\mathcal{V}$ slik at $D' \vdash \Gamma[g, h]$.

Avledete regler

Et hygienisk lemma – 1

Lemma

La $\mathcal{V}$ være en mengde variable og anta $D \vdash \Gamma[g, h]$. Da finnes derivasjon D' uten bruk av egenvariable fra $\mathcal{V}$ slik at $D' \vdash \Gamma[g, h]$.

- Ved induksjon over høyden av derivasjonen D

Avledete regler

Et hygienisk lemma – 1

Lemma

La $\mathcal{V}$ være en mengde variable og anta $D \vdash \Gamma[g, h]$. Da finnes derivasjon D' uten bruk av egenvariable fra $\mathcal{V}$ slik at $D' \vdash \Gamma[g, h]$.

- Ved induksjon over høyden av derivasjonen D
- Opplagt om ikke siste regel er γ. Så anta at siste regel er

$$\frac{\Gamma', Fa}{\Gamma', \forall x.Fx}$$

Avledete regler

Et hygienisk lemma – 1

Lemma

La $\mathcal{V}$ være en mengde variable og anta $D \vdash \Gamma[g, h]$. Da finnes derivasjon D' uten bruk av egenvariable fra $\mathcal{V}$ slik at $D' \vdash \Gamma[g, h]$.

- Ved induksjon over høyden av derivasjonen D
- Opplagt om ikke siste regel er γ. Så anta at siste regel er

$$\frac{\Gamma', Fa}{\Gamma', \forall x.Fx}$$

- Forts ...

Avledete regler

Et hygienisk lemma – 2

- Forts . . .

Avledete regler

Et hygienisk lemma – 2

- Forts ...
- Anta at siste regel er

$$\frac{\Gamma', Fa}{\Gamma', \forall x.Fx}$$

Avledete regler

Et hygienisk lemma – 2

- Forts ...
- Anta at siste regel er

$$\frac{\Gamma', Fa}{\Gamma', \forall x.Fx}$$

- La b være en ny fersk variabel – verken brukt i D eller med i $\mathcal{V}$ – og bruk induksjon til å finne $D'' \vdash \Gamma', Fa[g, h^-]$ uten egenvariable fra $\mathcal{V} \cup \{b\}$. Erstatt a med b i D' slik at vi får $D'' \vdash \Gamma', Fb[g, h^-]$ og $D''' \vdash \Gamma, \forall x.Fx[g, h]$ der D''' ikke innholder egenvariable fra $\mathcal{V}$

Avledete regler
Tynning

Tynningsregelen er

$$\frac{\Gamma}{\Gamma, \Delta}\ \text{Tynning}$$

Lemma

Tynningsregelen er en enkel avledet regel.

Avledete regler

Tynning

Tynningsregelen er

$$\frac{\Gamma}{\Gamma, \Delta}\ \text{Tynning}$$

Lemma

Tynningsregelen er en enkel avledet regel.

- Anta $D \vdash \Gamma[g, h]$ og etter hygienisk lemma at D ikke inneholder egenvariable som er i sekventen Δ.

Avledete regler

Tynning

Tynningsregelen er

$$\dfrac{\Gamma}{\Gamma, \Delta}\ \text{Tynning}$$

Lemma

Tynningsregelen er en enkel avledet regel.

- Anta $D \vdash \Gamma[g, h]$ og etter hygienisk lemma at D ikke inneholder egenvariable som er i sekventen Δ.
- Legg til Δ i alle sekventer i D og vi får $D' \vdash \Gamma, \Delta[g, h]$

Avledete regler

Omvending av α, β og δ – 1

$$\frac{\Gamma, F \lor G}{\Gamma, F, G}\ \alpha \qquad \frac{\Gamma, \forall x.Fx}{\Gamma, Ft}\ \delta$$

$$\frac{\Gamma, F \land G}{\Gamma, F}\ \beta_1 \qquad \frac{\Gamma, F \land G}{\Gamma, G}\ \beta_2$$

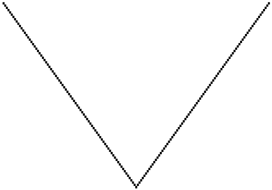
Lemma

Omvendingene av reglene α, β og δ er enkle avledete regler

Avledete regler

Omvending av α, β og δ – 2

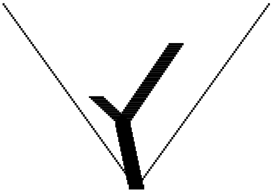
Samme bevis for alle disse reglene. Gjør dette for regel β_1. Så anta at vi har $\vdash \Gamma, F \land G$. Kan anskueliggjøre dette ved



Avledete regler

Omvending av α, β og δ – 2

Samme bevis for alle disse reglene. Gjør dette for regel β_1. Så anta at vi har $\vdash \Gamma, F \wedge G$. Kan anskueliggjøre dette ved



Her har vi markert tråden over $F \wedge G$ – dvs forekomstene av $F \wedge G$ fra den i konklusjonen og oppover. Tråden avsluttes i punkter med enten aksiom eller konklusjon i β-regel. Erstatt samtlige punkter i denne tråden med F. Ved aksiomer – gjør ikke noe. Ved konklusjon av β-regel med hovedformel $F \wedge G$ – kutt ut høyre premiss og fortsett med venstre premiss. Vi får en ny derivasjon av Γ, F der verken grad eller høyde blir større.

Hovedlemma

Selve lemmaet

Lemma

Anta at F har lengde $\leq g$ og anta $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \neg F[g^-, h]$. Da har vi $\vdash \Gamma[g^-, 2h]$

Hovedlemma

Selve lemmaet

Lemma

Anta at F *har lengde* $\leq g$ *og anta* $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$ *og* $\vdash \Gamma, \neg F[g^-, h]$. *Da har vi* $\vdash \Gamma[g^-, 2h]$

- Det interessante tilfellet er når lengden til F er g og i den endelige derivasjonen ikke bruker noe snitt med så stor snittformel

Hovedlemma

Selve lemmaet

Lemma

Anta at F har lengde $\leq g$ og anta $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \neg F[g^-, h]$. Da har vi $\vdash \Gamma[g^-, 2h]$

- Det interessante tilfellet er når lengden til F er g og i den endelige derivasjonen ikke bruker noe snitt med så stor snittformel
- Bevis er over oppbyggingen av F

Hovedlemma

Selve lemmaet

Lemma

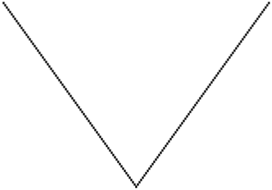
Anta at F har lengde $\leq g$ og anta $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \neg F[g^-, h]$. Da har vi $\vdash \Gamma[g^-, 2h]$

- Det interessante tilfellet er når lengden til F er g og i den endelige derivasjonen ikke bruker noe snitt med så stor snittformel
- Bevis er over oppbyggingen av F
- Vi får tre tilfeller for F – litteral, konnektiv, kvantor

Hovedlemma

Litteral

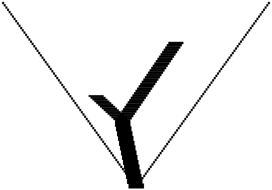
Se på derivasjonen av Γ, L



Hovedlemma

Litteral

Se på derivasjonen av Γ, L



Vi har markert tråden over L. Vi stryker nå vekk alle forekomstene i tråden. Se på topppunktene i tråden

- L inngår som aksiom. Etter stryking av L vil da sekventen se slik ut $\Gamma_0, \neg L$. Da setter vi derivasjonen $\vdash \Gamma_0, \Gamma, \neg L$ på toppen.
- Aksiom der L ikke inngår. Det vil fortsette å være et aksiom etter stryking av L i tråden.

Vi ender opp med derivasjon $\vdash \Gamma[0, 2h]$.

Hovedlemma

Konnektiver

- Vi antar $\vdash \Gamma, F \wedge G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F} \vee \overline{G}[g^-, h]$

Hovedlemma

Konnektiver

- Vi antar $\vdash \Gamma, F \wedge G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F} \vee \overline{G}[g^-, h]$
- Tilfellet $h = 1$ er trivielt – da er begge sekventene aksiomer.

Hovedlemma

Konnektiver

- Vi antar $\vdash \Gamma, F \wedge G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F} \vee \overline{G}[g^-, h]$
- Tilfellet $h = 1$ er trivielt – da er begge sekventene aksiomer.
- Ved omvending $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$, $\vdash \Gamma, G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F}, \overline{G}[g^-, h]$

Hovedlemma

Konnektiver

- Vi antar $\vdash \Gamma, F \wedge G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F} \vee \overline{G}[g^-, h]$
- Tilfellet $h = 1$ er trivielt – da er begge sekventene aksiomer.
- Ved omvending $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$, $\vdash \Gamma, G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F}, \overline{G}[g^-, h]$
- Snittformlene F og G er av lengde $< g$

Hovedlemma

Konnektiver

- Vi antar $\vdash \Gamma, F \wedge G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F} \vee \overline{G}[g^-, h]$
- Tilfellet $h = 1$ er trivielt – da er begge sekventene aksiomer.
- Ved omvending $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$, $\vdash \Gamma, G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F}, \overline{G}[g^-, h]$
- Snittformlene F og G er av lengde $< g$
- Vi får $\vdash \Gamma[g^-, h+2]$

Hovedlemma

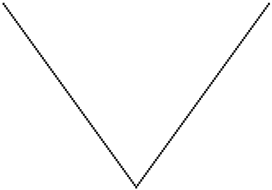
Konnektiver

- Vi antar $\vdash \Gamma, F \wedge G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F} \vee \overline{G}[g^-, h]$
- Tilfellet $h = 1$ er trivielt – da er begge sekventene aksiomer.
- Ved omvending $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$, $\vdash \Gamma, G[g^-, h]$ og $\vdash \Gamma, \overline{F}, \overline{G}[g^-, h]$
- Snittformlene F og G er av lengde $< g$
- Vi får $\vdash \Gamma[g^-, h+2]$
- For $h > 1$, så er $h + 2 \leq 2h$, og vi har $\vdash \Gamma[g^-, 2h]$

Hovedlemma

Kvantorer – 1

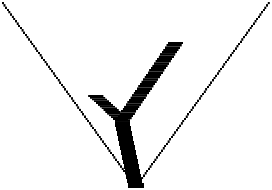
Se på derivasjonen av $\Gamma, \exists x.Fx$



Hovedlemma

Kvantorer – 1

Se på derivasjonen av $\Gamma, \exists x.Fx$



Vi har markert tråden med $\exists x.Fx$. I den tråden ønsker vi å stryke alle forekomster av den. Problemet er med forekomster av typen

$$\frac{\Gamma_0, \exists x.Fx, Fs}{\Gamma_0, \exists x.Fx}$$

Hovedlemma

Kvantorer – 2

I tråden har vi en rekke termer brukt til γ-regler som involverer $\exists x.Fx$. For hver slik forekomst av term setter vi inn

$$\frac{\Gamma, \Gamma_0, Fs \quad \Gamma, \Gamma_0, \overline{Fs}}{\Gamma, \Gamma_0}$$

Bruker δ-omvending og tynning og får

$$\vdash \Gamma, \Gamma_0, \overline{Fs}[g^-, h]$$

Dette gir

$$\vdash \Gamma[g^-, 2h]$$

og hovedlemmaet er bevist

Snitteliminasjon

Prosessen

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon

Snitteliminasjon

Prosessen

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon
- Finn maksimal lengde av snittformel

Snitteliminasjon

Prosessen

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon
- Finn maksimal lengde av snittformel
- Finn snitt av maksimal lengde så høyt oppe i derivasjonen som mulig

Snitteliminasjon

Prosessen

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon
- Finn maksimal lengde av snittformel
- Finn snitt av maksimal lengde så høyt oppe i derivasjonen som mulig
- Eliminer dette snittet ved bruk av hovedlemmaet

Snitteliminasjon

Prosessen

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon
- Finn maksimal lengde av snittformel
- Finn snitt av maksimal lengde så høyt oppe i derivasjonen som mulig
- Eliminer dette snittet ved bruk av hovedlemmaet
- Får derivasjon med færre snitt av maksimal lengde

Snitteliminasjon

Prosessen

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon
- Finn maksimal lengde av snittformel
- Finn snitt av maksimal lengde så høyt oppe i derivasjonen som mulig
- Eliminer dette snittet ved bruk av hovedlemmaet
- Får derivasjon med færre snitt av maksimal lengde
- Gjenta så lenge det er flere snitt igjen

Snitteliminasjon

Prosessen

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon
- Finn maksimal lengde av snittformel
- Finn snitt av maksimal lengde så høyt oppe i derivasjonen som mulig
- Eliminer dette snittet ved bruk av hovedlemmaet
- Får derivasjon med færre snitt av maksimal lengde
- Gjenta så lenge det er flere snitt igjen

Snitteliminasjon

Prosessen

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon
- Finn maksimal lengde av snittformel
- Finn snitt av maksimal lengde så høyt oppe i derivasjonen som mulig
- Eliminer dette snittet ved bruk av hovedlemmaet
- Får derivasjon med færre snitt av maksimal lengde
- Gjenta så lenge det er flere snitt igjen

Denne prosessen forutsetter at derivasjonene er velfunderte – vi kan plukke ut snitt så høyt oppe som mulig.

Snitteliminasjon

Teorem

Teorem

$$\vdash \Gamma[g,h] \quad \Rightarrow \quad \vdash \Gamma[g-1,2^h] \quad \Rightarrow \quad \vdash \Gamma[0,2^h_g]$$

$$\begin{aligned} 2^h_0 &= h \\ 2^h_{n+1} &= 2^{(2^h_n)} \end{aligned}$$

Vi får et 2-er tårn –

$$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

med parenteser den vriene veien – som estimat for høyden av den snittfrie derivasjonen.

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g
- Dette gjøres fra toppen og nedover

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g
- Dette gjøres fra toppen og nedover
- Kan se dette som en rekursjon over høyden h i D

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g
- Dette gjøres fra toppen og nedover
- Kan se dette som en rekursjon over høyden h i D
- Vi får h fordoblinger

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g
- Dette gjøres fra toppen og nedover
- Kan se dette som en rekursjon over høyden h i D
- Vi får h fordoblinger
- Dermed $\vdash \Gamma[g-1, 2^h]$

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g
- Dette gjøres fra toppen og nedover
- Kan se dette som en rekursjon over høyden h i D
- Vi får h fordoblinger
- Dermed $\vdash \Gamma[g - 1, 2^h]$

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g
- Dette gjøres fra toppen og nedover
- Kan se dette som en rekursjon over høyden h i D
- Vi får h fordoblinger
- Dermed $\vdash \Gamma[g - 1, 2^h]$

Resten av teoremet følger.

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g
- Dette gjøres fra toppen og nedover
- Kan se dette som en rekursjon over høyden h i D
- Vi får h fordoblinger
- Dermed $\vdash \Gamma[g-1, 2^h]$

Resten av teoremet følger. Dette gir et voldsomt estimat. En derivasjon med høyde 5 og snittgrad 2 får en snittfri derivasjon med høyde mindre enn

Snitteliminasjon

Teorem – beviset

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad g
- Dette gjøres fra toppen og nedover
- Kan se dette som en rekursjon over høyden h i D
- Vi får h fordoblinger
- Dermed $\vdash \Gamma[g-1, 2^h]$

Resten av teoremet følger. Dette gir et voldsomt estimat. En derivasjon med høyde 5 og snittgrad 2 får en snittfri derivasjon med høyde mindre enn

$$4294967296$$

Diskusjon

- En kan ikke unngå slik vekst

Diskusjon

- En kan ikke unngå slik vekst
- Matematiske bevis – bruker snitt

Diskusjon

- En kan ikke unngå slik vekst
- Matematiske bevis – bruker snitt
- Mekanisering av bevis – unngår snitt

Diskusjon

- En kan ikke unngå slik vekst
- Matematiske bevis – bruker snitt
- Mekanisering av bevis – unngår snitt
- Interaktiv bevissystem – brukeren gir forslag til snitt

Diskusjon

- En kan ikke unngå slik vekst
- Matematiske bevis – bruker snitt
- Mekanisering av bevis – unngår snitt
- Interaktiv bevissystem – brukeren gir forslag til snitt

Diskusjon

- En kan ikke unngå slik vekst
- Matematiske bevis – bruker snitt
- Mekanisering av bevis – unngår snitt
- Interaktiv bevissystem – brukeren gir forslag til snitt

Stort uutforsket tema – snittintroduksjon