

# Forelesning 12: Snitteliminasjon

Herman Ruge Jervell - 8. mai 2006

## 1 Sekventkalkyle

### 1.1 Regler

#### Sekventkalkyle

- Aksiomer: enkle sekventer som  $\Gamma, L, \neg L$  der  $L$  er litteral (atomær eller negasjon av atomær)
- Strukturelle regler: datastrukturen for sekventer
- Logiske regler: Fire typer  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Velger en versjon av sekventkalkyle som gjør det vanskelige snitteliminasjonsteoremet så enkelt som mulig.

Velger ensidig sekventkalkyle. Enkelt å oversette argumentet til andre systemer.

### 1.2 Ensidig sekventkalkyle

#### Ensidig sekventkalkyle

- Litteraler:  $L$  og  $\bar{L}$
- Konnektiver:  $F \wedge G$  og  $F \vee G$
- Kvantorer:  $\forall x.Fx$  og  $\exists x.Fx$

Negasjon er definert:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{F}} &= F \\ \overline{F \wedge G} &= \overline{F} \vee \overline{G} \\ \overline{F \vee G} &= \overline{F} \wedge \overline{G} \\ \overline{\forall x.Fx} &= \exists x.\overline{Fx} \\ \overline{\exists x.Fx} &= \forall x.\overline{Fx}\end{aligned}$$

Skriver  $\neg F$  for  $\overline{F}$

#### Ensidig sekventkalkyle

Lengden av en formel er gitt ved

- Litteraler:  $\ell(L) = 1$
- Konnektiver:  $\ell(F \wedge G) = \ell(F \vee G) = 1 + \max(\ell(F), \ell(G))$
- Kvantorer:  $\ell(\forall x.Fx) = \ell(\exists x.Fx) = 1 + \ell(Fx)$

Sekvent – endelig bag (multiset) av formler. Skrives  $\Gamma$  og  $\Gamma, F \dots$

### 1.3 Logiske regler

#### Ensidig sekventkalkyle

Aksiom er

$$\Gamma, L, \neg L$$

der  $L$  er litteral. De logiske reglene er

$$\frac{\Gamma, F, G}{\Gamma, F \vee G} \alpha \quad \frac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G} \beta$$

$$\frac{\Gamma, \exists x.Fx, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx} \gamma \quad \frac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \forall x.Fx} \delta$$

Regel  $\delta$  oppfyller egenvariabelbetingelse.

#### Ensidig sekventkalkyle

Den eneste strukturelle regelen er *kontraksjon*

$$\frac{\Gamma, F, F}{\Gamma, F}$$

Siden sekventer er bager, så kan vi bytte om på rekkefølgen av formler i sekventer uten videre – de representerer samme bag. Ved bruk av kontraksjon kan vi forenkle formuleringen av noen av reglene. Det er f eks vanlig å ha i stedet for regel  $\gamma$

$$\frac{\Gamma, Ft}{\Gamma, \exists x.Fx} \gamma'$$

men da glemmer en fort at regel  $\gamma$  skal gi en prosess der vi fra  $\exists x.Fx$  kan etter hvert produsere alle instanser  $Ft$  når vi falsifiserer formelen.

### 1.4 Snittregelen

#### Snitt

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, \neg F}{\Gamma} \text{ Snitt}$$

$F$  kalles snittformelen. Observer

- Dette er ikke en av de vanlige reglene
- Snittregelen følger den intenderte meningen med sekventer
- Vansker med en mekanisering av snitt
- Må gjette på snittformel

Snittregelen ble innført av Gerhard Gentzen. Vi skal se at vi kan eliminere bruk av snitt, men mot at vi får en voldsom økning av størrelsen på derivasjonen. Dette er hovedtemaet i denne forelesningen.

## Snitt

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ Modus ponens}$$

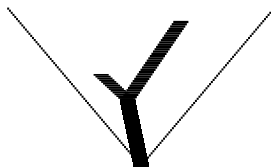
$$\frac{\text{Antagelse} \rightarrow \text{Lemma} \quad \text{Antagelse, Lemma} \rightarrow \text{Teorem}}{\text{Antagelse} \rightarrow \text{Teorem}}$$

## Derivasjoner

Se på premissene og konklusjonen i våre regler.

- *Den aktive formelen* er den som blir endret
- *Ekstraformlene* i konklusjonen finnes også i premissene
- Gitt en formel – vi kan spore forekomstene av formelen opp i derivasjonen gjennom ekstraformler inntil den ender enten opp som aktiv formel eller som aksiom
- *Tråd* – en sporing av slike forekomster av samme formel

Gitt en formel i konklusjonen av en derivasjon



Her har vi markert tråden.

## 2 Snitteliminasjon

### 2.1 Omvendning av regler

#### Kompleksitet

$$D \vdash \Gamma[g, h]$$

- $D$  er en derivasjon av sekventen  $\Gamma$
- Graden  $g$  : alle snittformler er av lengde  $\leq g$
- Høyden  $h$  : derivasjonen har høyde  $\leq h$  (høyde = høyden av derivasjonstreet)

$$D \vdash \Gamma[g^-, h^-]$$

- alle snittformler er av lengde  $< g$
- derivasjonen har høyde  $< h$

og varianter der vi utelater  $D$  eller kombinasjoner av  $g, g^-$  og  $h, h^-$

#### Avledete regler

En regel

$$\frac{\Gamma}{\Delta}$$

er en (vanlig) avledet regel om

$$\vdash \Gamma \Rightarrow \vdash \Delta$$

og en *enkel* avledet regel om

$$\vdash \Gamma[g, h] \Rightarrow \vdash \Delta[g, h]$$

Dette er litt forskjellig definisjon en den i forelesningene.

#### Avledete regler

**Lemma 2.1.** *La  $\mathcal{V}$  være en mengde variable og anta  $D \vdash \Gamma[g, h]$ . Da finnes derivasjon  $D'$  uten bruk av egenvariable fra  $\mathcal{V}$  slik at  $D' \vdash \Gamma[g, h]$ .*

- Ved induksjon over høyden av derivasjonen  $D$
- Opplagt om ikke siste regel er  $\gamma$ . Så anta at siste regel er

$$\frac{\Gamma', Fa}{\Gamma', \forall x.Fx}$$

- Forts ...

### Avledete regler

- Forts ...
- Anta at siste regel er

$$\frac{\Gamma', Fa}{\Gamma', \forall x.Fx}$$

- La  $b$  være en ny fersk variabel – verken brukt i  $D$  eller med i  $\mathcal{V}$  – og bruk induksjon til å finne  $D'' \vdash \Gamma', Fa[g, h^-]$  uten egenvariable fra  $\mathcal{V} \cup \{b\}$ . Erstatt  $a$  med  $b$  i  $D'$  slik at vi får  $D'' \vdash \Gamma', Fb[g, h^-]$  og  $D''' \vdash \Gamma, \forall x.Fx[g, h]$  der  $D'''$  ikke inneholder egenvariable fra  $\mathcal{V}$

### Avledete regler

Tynningsregelen er

$$\frac{\Gamma}{\Gamma, \Delta} \text{ Tynning}$$

**Lemma 2.2.** *Tynningsregelen er en enkel avledet regel.*

- Anta  $D \vdash \Gamma[g, h]$  og etter hygienisk lemma at  $D$  ikke inneholder egenvariable som er i sekventen  $\Delta$ .
- Legg til  $\Delta$  i alle sekventer i  $D$  og vi får  $D' \vdash \Gamma, \Delta[g, h]$

### Avledete regler

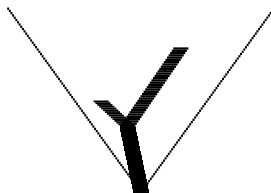
$$\frac{\Gamma, F \vee G}{\Gamma, F, G} \alpha \quad \frac{\Gamma, \forall x.Fx}{\Gamma, Ft} \delta$$

$$\frac{\Gamma, F \wedge G}{\Gamma, F} \beta_1 \quad \frac{\Gamma, F \wedge G}{\Gamma, G} \beta_2$$

**Lemma 2.3.** *Omvendingene av reglene  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\delta$  er enkle avledete regler*

## Avledete regler

Samme bevis for alle disse reglene. Gjør dette for regel  $\beta_1$ . Så anta at vi har  $\vdash \Gamma, F \wedge G$ . Kan anskueliggjøre dette ved



Her har vi markert tråden over  $F \wedge G$  – dvs forekomstene av  $F \wedge G$  fra den i konklusjonen og oppover. Tråden avsluttes i punkter med enten aksiom eller konklusjon i  $\beta$ -regel. Erstatt samtlige punkter i denne tråden med  $F$ . Ved aksiomer – gjør ikke noe. Ved konklusjon av  $\beta$ -regel med hovedformel  $F \wedge G$  – kutt ut høyre premiss og fortsett med venstre premiss. Vi får en ny derivasjon av  $\Gamma, F$  der verken grad eller høyde blir større.

## 2.2 Hovedlemma

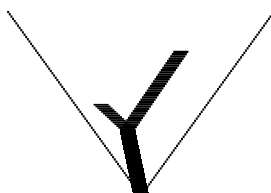
### Hovedlemma

**Lemma 2.4.** Anta at  $F$  har lengde  $\leq g$  og anta  $\vdash \Gamma, F[g^-, h]$  og  $\vdash \Gamma, \neg F[g^-, h]$ . Da har vi  $\vdash \Gamma[g^-, 2h]$

- Det interessante tilfellet er når lengden til  $F$  er  $g$  og i den endelige derivasjonen ikke bruker noe snitt med så stor snittformel
- Bevis er over oppbyggingen av  $F$
- Vi får tre tilfeller for  $F$  – litteral, konnektiv, kvantor

### Hovedlemma

Se på derivasjonen av  $\Gamma, L$



Vi har markert tråden over  $L$ . Vi stryker nå vekk alle forekomstene i tråden. Se på topppunktene i tråden

- $L$  inngår som aksiom. Etter stryking av  $L$  vil da sekventen se slik ut  $\Gamma_0, \neg L$ . Da setter vi derivasjonen  $\vdash \Gamma_0, \Gamma, \neg L$  på toppen.
- Aksiom der  $L$  ikke inngår. Det vil fortsette å være et aksiom etter stryking av  $L$  i tråden.

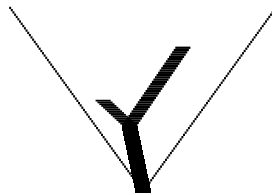
Vi ender opp med derivasjon  $\vdash \Gamma[0, 2h]$ .

## Hovedlemma

- Vi antar  $\vdash \Gamma, F \wedge G[g^-, h]$  og  $\vdash \Gamma, \overline{F} \vee \overline{G}[g^-, h]$
- Tilfellet  $h = 1$  er trivielt – da er begge sekventene aksiomer.
- Ved omvending  $\vdash \Gamma, F[g^-, h], \vdash \Gamma, G[g^-, h]$  og  $\vdash \Gamma, \overline{F}, \overline{G}[g^-, h]$
- Snittformlene  $F$  og  $G$  er av lengde  $< g$
- Vi får  $\vdash \Gamma[g^-, h + 2]$
- For  $h > 1$ , så er  $h + 2 \leq 2h$ , og vi har  $\vdash \Gamma[g^-, 2h]$

## Hovedlemma

Se på derivasjonen av  $\Gamma, \exists x.Fx$



Vi har markert tråden med  $\exists x.Fx$ . I den tråden ønsker vi å stryke alle forekomster av den. Problemet er med forekomster av typen

$$\frac{\Gamma_0, \exists x.Fx, Fs}{\Gamma_0, \exists x.Fx}$$

## Hovedlemma

I tråden har vi en rekke termer brukt til  $\gamma$ -regler som involverer  $\exists x.Fx$ . For hver slik forekomst av term setter vi inn

$$\frac{\Gamma, \Gamma_0, Fs \quad \Gamma, \Gamma_0, \overline{Fs}}{\Gamma, \Gamma_0}$$

Bruker  $\delta$ -omvending og tynning og får

$$\vdash \Gamma, \Gamma_0, \overline{Fs}[g^-, h]$$

Dette gir

$$\vdash \Gamma[g^-, 2h]$$

og hovedlemmaet er bevist

## 2.3 Snitteliminasjon

### Snitteliminasjon

Prosess for eliminering av snitt

- Gitt derivasjon
- Finn maksimal lengde av snittformel
- Finn snitt av maksimal lengde så høyt oppe i derivasjonen som mulig
- Eliminer dette snittet ved bruk av hovedlemmaet
- Får derivasjon med færre snitt av maksimal lengde
- Gjenta så lenge det er flere snitt igjen

Denne prosessen forutsetter at derivasjonene er velfunderte – vi kan plukke ut snitt så høyt oppe som mulig.

### Snitteliminasjon

#### Teorem 2.1.

$$\vdash \Gamma[g, h] \Rightarrow \vdash \Gamma[g - 1, 2^h] \Rightarrow \vdash \Gamma[0, 2_g^h]$$

$$\begin{aligned} 2_0^h &= h \\ 2_{n+1}^h &= 2^{(2_n^h)} \end{aligned}$$

Vi får et 2-er tårn –

$$2^{2^{2^{\vdots}}}$$

med parenteser den vriene veien – som estimat for høyden av den snittfrie derivasjonen.

### Snitteliminasjon

- $D \vdash \Gamma[g, h]$
- Vi bruker så hovedlemmaet på snitt av grad  $g$
- Dette gjøres fra toppen og nedover
- Kan se dette som en rekursjon over høyden  $h$  i  $D$
- Vi får  $h$  fordoblinger
- Dermed  $\vdash \Gamma[g - 1, 2^h]$

Resten av teoremet følger. Dette gir et voldsomt estimat. En derivasjon med høyde 5 og snittgrad 2 får en snittfri derivasjon med høyde mindre enn

4294967296



## Diskusjon

- En kan ikke unngå slik vekst
- Matematiske bevis – bruker snitt
- Mekanisering av bevis – unngår snitt
- Interaktiv bevissystem – brukeren gir forslag til snitt

*Stort utforsket tema – snittintroduksjon*