INF3170 – Logikk

Forelesning 13: Automatisk bevissøk III — fri-variabel kompletthet og inkrementelt bevissøk

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

15. mai 2006

Dagens plan

1. Automatisk bevissøk III
   - Sunnhet – repetisjon
   - Kompletthet
   - Inkrementelt bevissøk

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Teorem (Sunnhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, *så er den gyldig.*

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Teorem (Sunnhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, *så er den gyldig.*

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Teorem (Sunnhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, *så er den gyldig.*

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er sunn.

Teorem (Sunnhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK*, så er den gyldig.*

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Vi skal ta en kort repetisjon av sunnhetsargumentet.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β-reglene i fri-variabel LK bevarer ikke falsifiserbarhet oppover.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β-reglene i fri-variabel LK bevarer ikke falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β-reglene i fri-variabel LK bevarer ikke falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.
- En modell falsifiserer en utledning hvis ethvert valg av variabeltilordning for modellen gir en falsifisert gren.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
  - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
  - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
  - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell $\mathcal{M}$.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
  - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell $\mathcal{M}$.
- For α-, β- og γ-reglene kan vi vise at $\mathcal{M}$ også falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
  - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell $\mathcal{M}$.
- For α-, β- og γ-reglene kan vi vise at $\mathcal{M}$ også falsifiserer den utvidete utledningen.
- Det holder ikke for δ-reglene. Her konstruerer vi en ny modell (basert på $\mathcal{M}$) som falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\exists$$

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{ L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f.
- For hver variabeltilordning μ for $\mathcal{M}'$ spesifiserer vi $\mathcal{M}', \mu$ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f.
- For hver variabeltilordning μ for $\mathcal{M}'$ spesifiserer vi $\mathcal{M}', \mu$ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at $\mathcal{M}', \mu$ gjør $\varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x]$ sann dersom $\mathcal{M}, \mu$ gjør $\exists x \varphi$ sann.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f.
- For hver variabeltilordning μ for $\mathcal{M}'$ spesifiserer vi $\mathcal{M}', \mu$ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at $\mathcal{M}', \mu$ gjør $\varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x]$ sann dersom $\mathcal{M}, \mu$ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π og $\mathcal{M}$ er lik $\mathcal{M}'$ utenom f, så er π falsifisert av $\mathcal{M}'$.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{ L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f.
- For hver variabeltilordning μ for $\mathcal{M}'$ spesifiserer vi $\mathcal{M}', \mu$ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at $\mathcal{M}', \mu$ gjør $\varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x]$ sann dersom $\mathcal{M}, \mu$ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π og $\mathcal{M}$ er lik $\mathcal{M}'$ utenom f, så er π falsifisert av $\mathcal{M}'$.
- Ved å bruke de semantiske definisjonene, viser vi så at $\mathcal{M}'$ falsifiserer den utvidete utledningen.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathsf{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathsf{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathrm{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathrm{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathsf{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathsf{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK, *så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathrm{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathrm{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

$\square$

1. Automatisk bevissøk III
   - Sunnhet – repetisjon
   - Kompletthet
   - Inkrementelt bevissøk

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel* LK.

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel* LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel* LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel* LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Husk:

- En modell $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for $\mathcal{M}$ gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Kompletthet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel* LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Husk:

- En modell $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for $\mathcal{M}$ gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under $\mathcal{M}$ være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.
  - *"Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener."*

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.
  - *"Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener."*
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en åpen gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{G}^{\top}$

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{G}^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathrm{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathrm{G}^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathrm{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathrm{G}^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathrm{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathrm{G}^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\perp}$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G: $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathrm{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathrm{G}^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\perp}$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
  - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i $\mathrm{G}^{\top}$ eller $\mathrm{G}^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G:
    $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathrm{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathrm{G}^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{G}^{\perp}$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
  - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i $\mathrm{G}^{\top}$ eller $\mathrm{G}^{\perp}$.
- Det følger at $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq \mathrm{G}^{\top}$ og $\Delta \subseteq \mathrm{G}^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathrm{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathrm{G}^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathsf{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathsf{G}^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathsf{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathsf{G}^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $G^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.
  - For γ-formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $G^\top$ og falsifiserer alle formler i $G^\perp$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
  - For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.
  - For γ-formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G.
- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ, kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den grunnede åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den grunnede åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ-reglene imidlertid frie variable istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av rettferdig strategi.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en rettferdig strategi til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en grunn substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den grunnede åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ-reglene imidlertid frie variable istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av rettferdig strategi.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ-formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*
2. *Hvis φ er en γ-formel på formen $\mathsf{Q}x\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for uendelig mange variable u.*

Rettferdig substitusjon

Rettferdig substitusjon

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x P x$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}
$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x P x$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x P x, P u_1, P u_2, P u_3 \vdash Q f a}}{\forall x P x, P u_1, P u_2 \vdash Q f a}}{\forall x P x, P u_1 \vdash Q f a}}{\forall x P x \vdash Q f a}
$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.
- Utledningen har kun én gren, kall den G.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\cfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}
$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x P x$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x P x, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x P x, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x P x, Pa \vdash Qfa}}{\forall x P x \vdash Qfa}$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til Gσ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til Gσ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$ Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt ikke er i Gσ, f.eks. $t = fa$.

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x P x$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}
$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til Gσ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$ Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt ikke er i Gσ, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra Gσ vil derfor ikke gjøre $\forall x P x$ sann.

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}
$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

- Vi har nå at $Pt \in G\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $G\tau$.

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

- Vi har nå at $Pt \in \mathrm{G}\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $\mathrm{G}\tau$.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra $\mathrm{G}\tau$ oppfylle $\forall x Px$.

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa, Pfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pa \vdash Qfa}}{\forall x Px \vdash Qfa}$$

- Vi har nå at $Pt \in \mathrm{G}\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $\mathrm{G}\tau$.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra $\mathrm{G}\tau$ oppfylle $\forall x Px$.
- Vi kaller τ en rettferdig substitusjon.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π *være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la* G *være en gren i* π*.*

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G *være en gren i π. La σ være en substitusjon.*

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π *være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la* G *være en gren i* π*. La* σ *være en substitusjon.*

- σ *er rettferdig m.h.p. en* γ*-formel* $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis*

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G *være en gren i π. La σ være en substitusjon.*

- *σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel* $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer t i Herbrand-universet til* G

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π *være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la* G *være en gren i* π. *La* σ *være en substitusjon.*

- σ *er rettferdig m.h.p. en* γ*-formel* $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer t i Herbrand-universet til* G *så finnes en formel* $\varphi[u/x]$ *aktiv i en* γ*-slutning i* G

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π *være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la* G *være en gren i* π. *La* σ *være en substitusjon.*

- σ *er rettferdig m.h.p. en* γ*-formel* $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer* t *i Herbrand-universet til* G *så finnes en formel* $\varphi[u/x]$ *aktiv i en* γ*-slutning i* G *slik at* $\sigma(u) = t$.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G *være en gren i π. La σ være en substitusjon.*

- *σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel* $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer t i Herbrand-universet til* G *så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i* G *slik at $\sigma(u) = t$.*
- *σ er rettferdig m.h.p. grenen* G *hvis*

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G *være en gren i π. La σ være en substitusjon.*

- *σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel* $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer t i Herbrand-universet til* G *så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i* G *slik at $\sigma(u) = t$.*
- *σ er rettferdig m.h.p. grenen* G *hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i* G.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G *være en gren i π. La σ være en substitusjon.*

- *σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel* $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer t i Herbrand-universet til* G *så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i* G *slik at $\sigma(u) = t$.*
- *σ er rettferdig m.h.p. grenen* G *hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i* G.
- *σ er rettferdig m.h.p. utledningen π hvis*

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G *være en gren i π. La σ være en substitusjon.*

- *σ er rettferdig m.h.p. en γ-formel* $\mathsf{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer t i Herbrand-universet til* G *så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i* G *slik at $\sigma(u) = t$.*
- *σ er rettferdig m.h.p. grenen* G *hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i* G*.*
- *σ er rettferdig m.h.p. utledningen π hvis σ er rettferdig m.h.p. hver gren i π.*

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at Gσ kun inneholder lukkede formler.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $G\sigma$ kun inneholder lukkede formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at Gσ kun inneholder lukkede formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $G\sigma$ kun inneholder lukkede formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er lukket. Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.

1. Automatisk bevissøk III
   - Sunnhet – repetisjon
   - Kompletthet
   - Inkrementelt bevissøk

Motivasjon

Motivasjon

- Vi har nå en sunn og komplett sekventkalkyle – fri-variabel LK – der vi utsetter valg av term i γ-slutningene ved å introdusere frie variable.

Motivasjon

- Vi har nå en sunn og komplett sekventkalkyle – fri-variabel LK – der vi utsetter valg av term i γ-slutningene ved å introdusere frie variable.
- Kalkylen sier imidlertid ikke noe om hvordan vi skal gå fram for å søke etter bevis med kalkylen.

Motivasjon

- Vi har nå en sunn og komplett sekventkalkyle – fri-variabel LK – der vi utsetter valg av term i γ-slutningene ved å introdusere frie variable.
- Kalkylen sier imidlertid ikke noe om hvordan vi skal gå fram for å søke etter bevis med kalkylen.
- Vi trenger en algoritme for bevissøk!

Motivasjon

- Vi har nå en sunn og komplett sekventkalkyle – fri-variabel LK – der vi utsetter valg av term i γ-slutningene ved å introdusere frie variable.
- Kalkylen sier imidlertid ikke noe om hvordan vi skal gå fram for å søke etter bevis med kalkylen.
- Vi trenger en algoritme for bevissøk!
- Algoritmen må bestå av to operasjoner:

Motivasjon

- Vi har nå en sunn og komplett sekventkalkyle – fri-variabel LK – der vi utsetter valg av term i γ-slutningene ved å introdusere frie variable.
- Kalkylen sier imidlertid ikke noe om hvordan vi skal gå fram for å søke etter bevis med kalkylen.
- Vi trenger en algoritme for bevissøk!
- Algoritmen må bestå av to operasjoner:
    1. Utvide utledningen ved å anvende fri-variabel LK-regler.

Motivasjon

- Vi har nå en sunn og komplett sekventkalkyle – fri-variabel LK – der vi utsetter valg av term i γ-slutningene ved å introdusere frie variable.
- Kalkylen sier imidlertid ikke noe om hvordan vi skal gå fram for å søke etter bevis med kalkylen.
- Vi trenger en algoritme for bevissøk!
- Algoritmen må bestå av to operasjoner:
  1. Utvide utledningen ved å anvende fri-variabel LK-regler.
  2. Sjekke om det finnes en lukkende substitusjon for den gjeldende utledningen, dvs. om den gjeldende utledningen kan lukkes.

Motivasjon

- Vi har nå en sunn og komplett sekventkalkyle – fri-variabel LK – der vi utsetter valg av term i γ-slutningene ved å introdusere frie variable.
- Kalkylen sier imidlertid ikke noe om hvordan vi skal gå fram for å søke etter bevis med kalkylen.
- Vi trenger en algoritme for bevissøk!
- Algoritmen må bestå av to operasjoner:
  1. Utvide utledningen ved å anvende fri-variabel LK-regler.
  2. Sjekke om det finnes en lukkende substitusjon for den gjeldende utledningen, dvs. om den gjeldende utledningen kan lukkes.

Problem

Hvordan veksle mellom de to operasjonene i en søkealgoritme?

Forslag til søkealgoritme

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

1. Utvid den gjeldende utledningen ved å anvende én LK-regel.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

1. Utvid den gjeldende utledningen ved å anvende én LK-regel.
2. Sjekk om den gjeldende utledningen kan lukkes.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

1. Utvid den gjeldende utledningen ved å anvende én LK-regel.
2. Sjekk om den gjeldende utledningen kan lukkes.
3. Hvis utledningen ikke kan lukkes, gå til 1.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

1. Utvid den gjeldende utledningen ved å anvende én LK-regel.
2. Sjekk om den gjeldende utledningen kan lukkes.
3. Hvis utledningen ikke kan lukkes, gå til 1.

- Vi har tidligere sett at selve regelanvendelsen kan utføres i konstant tid, og dermed er rimelig effektiv.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

1. Utvid den gjeldende utledningen ved å anvende én LK-regel.
2. Sjekk om den gjeldende utledningen kan lukkes.
3. Hvis utledningen ikke kan lukkes, gå til 1.

- Vi har tidligere sett at selve regelanvendelsen kan utføres i konstant tid, og dermed er rimelig effektiv.
- Det er imidlertid ikke tilfellet med lukkingssjekken!

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

1. Utvid den gjeldende utledningen ved å anvende én LK-regel.
2. Sjekk om den gjeldende utledningen kan lukkes.
3. Hvis utledningen ikke kan lukkes, gå til 1.

- Vi har tidligere sett at selve regelanvendelsen kan utføres i konstant tid, og dermed er rimelig effektiv.
- Det er imidlertid ikke tilfellet med lukkingssjekken!
- Problemet å avgjøre hvorvidt det finnes en lukkende substitusjon for en fri-variabel utledning er *NP-komplett i størrelsen på løvsekventene*.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

1. Utvid den gjeldende utledningen ved å anvende én LK-regel.
2. Sjekk om den gjeldende utledningen kan lukkes.
3. Hvis utledningen ikke kan lukkes, gå til 1.

- Vi har tidligere sett at selve regelanvendelsen kan utføres i konstant tid, og dermed er rimelig effektiv.
- Det er imidlertid ikke tilfellet med lukkingssjekken!
- Problemet å avgjøre hvorvidt det finnes en lukkende substitusjon for en fri-variabel utledning er *NP-komplett i størrelsen på løvsekventene*.
- Lukkingssjekk etter hver regelanvendelse fører derfor til en svært lite effektiv søkealgoritme.

Forslag til søkealgoritme

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.
3. Sjekk om utledningen kan lukkes.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.
3. Sjekk om utledningen kan lukkes.
4. Hvis ikke, utvid grensen og start på nytt fra punkt 2.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.
3. Sjekk om utledningen kan lukkes.
4. Hvis ikke, utvid grensen og start på nytt fra punkt 2.

- Her gjør vi ikke den kostbare lukkingssjekken like ofte som i forslag 1.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.
3. Sjekk om utledningen kan lukkes.
4. Hvis ikke, utvid grensen og start på nytt fra punkt 2.

- Her gjør vi ikke den kostbare lukkingssjekken like ofte som i forslag 1.
- Vi har imidlertid et annet problem.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.
3. Sjekk om utledningen kan lukkes.
4. Hvis ikke, utvid grensen og start på nytt fra punkt 2.

- Her gjør vi ikke den kostbare lukkingssjekken like ofte som i forslag 1.
- Vi har imidlertid et annet problem.
- Hvis lukkingssjekken i punkt 3 feiler, så utvider vi grensen og starter hele søket på nytt.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.
3. Sjekk om utledningen kan lukkes.
4. Hvis ikke, utvid grensen og start på nytt fra punkt 2.

- Her gjør vi ikke den kostbare lukkingssjekken like ofte som i forslag 1.
- Vi har imidlertid et annet problem.
- Hvis lukkingssjekken i punkt 3 feiler, så utvider vi grensen og starter hele søket på nytt. Vi mister
  - utledningen vi hadde konstruert med den gamle grensen

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.
3. Sjekk om utledningen kan lukkes.
4. Hvis ikke, utvid grensen og start på nytt fra punkt 2.

- Her gjør vi ikke den kostbare lukkingssjekken like ofte som i forslag 1.
- Vi har imidlertid et annet problem.
- Hvis lukkingssjekken i punkt 3 feiler, så utvider vi grensen og starter hele søket på nytt. Vi mister
  - utledningen vi hadde konstruert med den gamle grensen, og
  - kunnskap om substitusjoner som lukker *deler av* utledningen, og som kanskje kan utvides til lukkende substitusjoner med den nye grensen.

Krav til søkealgoritme

Krav til søkealgoritme

- Vi ønsker at en søkealgoritme har følgende egenskaper:

Krav til søkealgoritme

- Vi ønsker at en søkealgoritme har følgende egenskaper:
  1. Effektiv – gjøre kostbare operasjoner så sjendent som mulig.

Krav til søkealgoritme

- Vi ønsker at en søkealgoritme har følgende egenskaper:
  1. Effektiv – gjøre kostbare operasjoner så sjendent som mulig.
  2. Tidlig terminering – i tilfelle rotsekventen er bevisbar, ønsker vi å terminere søket så tidlig som mulig etter at det er mulig å lukke gjeldende utledning.

Krav til søkealgoritme

- Vi ønsker at en søkealgoritme har følgende egenskaper:
  1. Effektiv – gjøre kostbare operasjoner så sjendent som mulig.
  2. Tidlig terminering – i tilfelle rotsekventen er bevisbar, ønsker vi å terminere søket så tidlig som mulig etter at det er mulig å lukke gjeldende utledning.
  3. Ingen omstart – vi ønsker ikke at informasjon vi opparbeider oss i løpet av bevissøket skal gå tapt p.g.a. omstart.

Krav til søkealgoritme

- Vi ønsker at en søkealgoritme har følgende egenskaper:
  1. Effektiv – gjøre kostbare operasjoner så sjendent som mulig.
  2. Tidlig terminering – i tilfelle rotsekventen er bevisbar, ønsker vi å terminere søket så tidlig som mulig etter at det er mulig å lukke gjeldende utledning.
  3. Ingen omstart – vi ønsker ikke at informasjon vi opparbeider oss i løpet av bevissøket skal gå tapt p.g.a. omstart.
- Forslag 1 (alternering) har egenskap 2, men er håpløst ineffektiv.

Krav til søkealgoritme

- Vi ønsker at en søkealgoritme har følgende egenskaper:
  1. Effektiv – gjøre kostbare operasjoner så sjendent som mulig.
  2. Tidlig terminering – i tilfelle rotsekventen er bevisbar, ønsker vi å terminere søket så tidlig som mulig etter at det er mulig å lukke gjeldende utledning.
  3. Ingen omstart – vi ønsker ikke at informasjon vi opparbeider oss i løpet av bevissøket skal gå tapt p.g.a. omstart.
- Forslag 1 (alternering) har egenskap 2, men er håpløst ineffektiv.
- Forslag 2 (iterativ dybde) er bedre enn forslag 1 m.h.p. effektivitet, men har hverken egenskap 2 eller 3.

Krav til søkealgoritme

- Vi ønsker at en søkealgoritme har følgende egenskaper:
  1. Effektiv – gjøre kostbare operasjoner så sjendent som mulig.
  2. Tidlig terminering – i tilfelle rotsekventen er bevisbar, ønsker vi å terminere søket så tidlig som mulig etter at det er mulig å lukke gjeldende utledning.
  3. Ingen omstart – vi ønsker ikke at informasjon vi opparbeider oss i løpet av bevissøket skal gå tapt p.g.a. omstart.
- Forslag 1 (alternering) har egenskap 2, men er håpløst ineffektiv.
- Forslag 2 (iterativ dybde) er bedre enn forslag 1 m.h.p. effektivitet, men har hverken egenskap 2 eller 3.
- Er det mulig å lage en effektiv algoritme som har tidlig terminering, men som ikke krever omstart?

Komplementære par bevares ved utvidelse

- Fri-variabel LK har en egenskap som tilsier at vi kan lage en effektiv søkealgoritme med de ønskede egenskapene.

Komplementære par bevares ved utvidelse

- Fri-variabel LK har en egenskap som tilsier at vi kan lage en effektiv søkealgoritme med de ønskede egenskapene.
- Hvis det er mulig å lukke en *løvsekvent* i en fri-variabel utledning, så har den formen

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta.$$

Komplementære par bevares ved utvidelse

- Fri-variabel LK har en egenskap som tilsier at vi kan lage en effektiv søkealgoritme med de ønskede egenskapene.
- Hvis det er mulig å lukke en *løvsekvent* i en fri-variabel utledning, så har den formen

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta.$$

- Vi sier at paret $P(s_1, \ldots, s_n), P(t_1, \ldots, t_n)$ er komplementært.

Komplementære par bevares ved utvidelse

- Fri-variabel LK har en egenskap som tilsier at vi kan lage en effektiv søkealgoritme med de ønskede egenskapene.
- Hvis det er mulig å lukke en *løvsekvent* i en fri-variabel utledning, så har den formen

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta.$$

- Vi sier at paret $P(s_1, \ldots, s_n), P(t_1, \ldots, t_n)$ er komplementært.
- Hvis en substitusjon σ unifiserer et komplementært par på en gren, så vil σ lukke grenen uansett hvordan vi utvider den.

Komplementære par bevares ved utvidelse

- Fri-variabel LK har en egenskap som tilsier at vi kan lage en effektiv søkealgoritme med de ønskede egenskapene.
- Hvis det er mulig å lukke en *løvsekvent* i en fri-variabel utledning, så har den formen

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta.$$

- Vi sier at paret $P(s_1, \ldots, s_n), P(t_1, \ldots, t_n)$ er komplementært.
- Hvis en substitusjon σ unifiserer et komplementært par på en gren, så vil σ lukke grenen uansett hvordan vi utvider den.
- Selv om vi deler grenen med en β-slutning, så vil σ lukke begge de nye grenene.

Komplementære par bevares ved utvidelse

- Fri-variabel LK har en egenskap som tilsier at vi kan lage en effektiv søkealgoritme med de ønskede egenskapene.
- Hvis det er mulig å lukke en *løvsekvent* i en fri-variabel utledning, så har den formen
$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta.$$
- Vi sier at paret $P(s_1, \dots, s_n), P(t_1, \dots, t_n)$ er komplementært.
- Hvis en substitusjon σ unifiserer et komplementært par på en gren, så vil σ lukke grenen uansett hvordan vi utvider den.
- Selv om vi deler grenen med en β-slutning, så vil σ lukke begge de nye grenene.
- Dette skyldes at i enhver LK-slutning så kopieres ekstraformlene inn i alle premisser i slutningen.

Eksempel

$$\forall x Px \vdash Pa \land Pb$$

Eksempel

$$\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

Eksempel

$$\cfrac{\cfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \overset{G_2}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2.

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \overset{G_2}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathsf{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \overset{\mathsf{G}_2}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

Lukking:

$$\dfrac{\mathsf{G}_1 \qquad \mathsf{G}_2}{}$$

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \overset{G_2}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

Lukking:

G_1	G_2
a/u	

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \overset{G_2}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

Lukking:

G_1	G_2
a/u	b/u

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{G_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u}\,\beta
$$

Lukking:

$$
\begin{array}{cc} G_1 & G_2 \\ \hline a/u & b/u \end{array}
$$

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.
- Vi introduserer v i G_2.

Eksempel

$$
\cfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \cfrac{\overset{G_2}{\forall x Px, Pv, {\color{red}Pu} \vdash {\color{red}Pb}}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\cfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u}\,\beta
$$

Lukking:

$$
\begin{array}{cc} G_1 & G_2 \\ \hline a/u & b/u \end{array}
$$

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.
- Vi introduserer v i G_2.
  - Grenen kan fremdeles lukkes med b/u, siden Pu og Pb er kopiert inn i den nye løvsekventen.

Eksempel

$$
\dfrac{\overset{\mathrm{G}_1}{\forall x P x, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{\mathrm{G}_2}{\forall x P x, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x P x, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\dfrac{\forall x P x, Pu \vdash Pa \land Pb}{\forall x P x \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u}\,\beta
$$

Lukking:

$$
\begin{array}{cc} \mathrm{G}_1 & \mathrm{G}_2 \\ \hline a/u & b/u \end{array}
$$

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.
- Vi introduserer v i G_2.
  - Grenen kan fremdeles lukkes med b/u, siden Pu og Pb er kopiert inn i den nye løvsekventen.
  - Vi kan i tillegg lukke G_2 med b/v.

Eksempel

$$\dfrac{\begin{matrix} G_1 \\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix} G_2 \\ \forall x Px, P{\color{red}v}, Pu \vdash P{\color{red}b} \end{matrix}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u}\,\beta$$

Lukking:

G_1	G_2
a/u	b/u
	${\color{red}b/v}$

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.
- Vi introduserer v i G_2.
  - Grenen kan fremdeles lukkes med b/u, siden Pu og Pb er kopiert inn i den nye løvsekventen.
  - Vi kan i tillegg lukke G_2 med b/v.

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathrm{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{\mathrm{G}_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u$$

Lukking:

G_1	G_2
a/u	b/u
	b/v

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.
- Vi introduserer v i G_2.
  - Grenen kan fremdeles lukkes med b/u, siden Pu og Pb er kopiert inn i den nye løvsekventen.
  - Vi kan i tillegg lukke G_2 med b/v.
- Merk: *ved utvidelse beholder vi eksisterende lukkinger av grener, samtidig som nye lukkingsmuligheter kan oppstå.*

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}G_1\\ \forall x Px, Pu \vdash Pa\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}G_2\\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb\end{array}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u
$$

Lukking:

G_1	G_2
a/u	b/u
	b/v

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men ikke samtidig.
- Vi introduserer v i G_2.
  - Grenen kan fremdeles lukkes med b/u, siden Pu og Pb er kopiert inn i den nye løvsekventen.
  - Vi kan i tillegg lukke G_2 med b/v.
- Merk: *ved utvidelse beholder vi eksisterende lukkinger av grener, samtidig som nye lukkingsmuligheter kan oppstå.*
- Utledningen i eksempelet kan lukkes med $a/u, b/v$.

Inkrementelt bevissøk

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathrm{Cl}(s)$ med substitusjoner.

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathrm{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de grenene som går gjennom sekventen s i π.

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathsf{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de grenene som går gjennom sekventen s i π.
- Hver gang vi utvider utledningen

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathsf{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de grenene som går gjennom sekventen s i π.
- Hver gang vi utvider utledningen
  - beregner vi for hver ny løvsekvent

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathrm{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de grenene som går gjennom sekventen s i π.
- Hver gang vi utvider utledningen
  - beregner vi for hver ny løvsekvent og for hvert nytt komplementært par i løvsekventen

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathrm{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de grenene som går gjennom sekventen s i π.
- Hver gang vi utvider utledningen
  - beregner vi for hver ny løvsekvent og for hvert nytt komplementært par i løvsekventen en mengde nye lukkende substitusjoner for løvsekventen m.h.p. det komplementære paret

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathrm{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de grenene som går gjennom sekventen s i π.
- Hver gang vi utvider utledningen
  - beregner vi for hver ny løvsekvent og for hvert nytt komplementært par i løvsekventen en mengde nye lukkende substitusjoner for løvsekventen m.h.p. det komplementære paret,
  - sender mengden nye lukkende substitusjoner nedover grenen mot rotsekventen, og

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathsf{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de grenene som går gjennom sekventen s i π.
- Hver gang vi utvider utledningen
  - beregner vi for hver ny løvsekvent og for hvert nytt komplementært par i løvsekventen en mengde nye lukkende substitusjoner for løvsekventen m.h.p. det komplementære paret,
  - sender mengden nye lukkende substitusjoner nedover grenen mot rotsekventen, og
  - utvider $\mathsf{Cl}(s)$ med nye lukkende substitusjonene for hver sekvent s på grenen.

Inkrementelt bevissøk

I inkrementelt bevissøk utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathsf{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de grenene som går gjennom sekventen s i π.
- Hver gang vi utvider utledningen
  - beregner vi for hver ny løvsekvent og for hvert nytt komplementært par i løvsekventen en mengde nye lukkende substitusjoner for løvsekventen m.h.p. det komplementære paret,
  - sender mengden nye lukkende substitusjoner nedover grenen mot rotsekventen, og
  - utvider $\mathsf{Cl}(s)$ med nye lukkende substitusjonene for hver sekvent s på grenen.
- Så snart Cl-mengden til rotsekventen er ikke-tom, kan vi avslutte søket – vi har funnet en substitusjon som lukker hele utledningen.

Eksempel – inkrementering

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathsf{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \overset{\mathsf{G}_2}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:

Eksempel – inkrementering

$$\dfrac{\dfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \overset{G_2}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

Lukking etter β:

$$\dfrac{G_1 \qquad G_2}{a/u}$$

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.

Eksempel – inkrementering

$$\dfrac{\dfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \overset{G_2}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u$$

Lukking etter β:

$$\begin{array}{cc} G_1 & G_2 \\ \hline a/u & b/u \end{array}$$

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.

Eksempel – inkrementering

$$
\dfrac{\overset{\mathrm{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{\mathrm{G}_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u}\,\beta
$$

Lukking etter β:

$$
\begin{array}{cc}
\mathrm{G}_1 & \mathrm{G}_2 \\
\hline
a/u & b/u
\end{array}
$$

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.
- Vi introduserer v i G_2.

Eksempel – inkrementering

$$\dfrac{\overset{\mathrm{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{\mathrm{G}_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\gamma_u}\beta$$

Lukking etter β:

$$\dfrac{\mathrm{G}_1 \qquad \mathrm{G}_2}{a/u \qquad b/u}$$

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.
- Vi introduserer v i G_2. *Hvilke nye lukkende substitusjoner har vi fått etter slutningen γ_v?*

Eksempel – inkrementering

$$
\cfrac{\cfrac{\mathrm{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \cfrac{\cfrac{\mathrm{G}_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\cfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u}\,\beta
$$

Lukking etter β:

G_1	G_2
a/u	b/u

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.
- Vi introduserer v i G_2. *Hvilke nye lukkende substitusjoner har vi fått etter slutningen γ_v?*
  - G_1 *har ikke fått noen nye lukkende substitusjoner.*

Eksempel – inkrementering

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\mathrm{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \cfrac{\overset{\mathrm{G}_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

Lukking etter β:

$$\frac{\mathrm{G}_1 \quad \mathrm{G}_2}{a/u \quad b/u}$$

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.
- Vi introduserer v i G_2. *Hvilke nye lukkende substitusjoner har vi fått etter slutningen γ_v?*
  - G_1 *har ikke fått noen nye lukkende substitusjoner.*
  - G_2 kan etter γ_v lukkes av alle σ slik at $u\sigma = b$ eller $v\sigma = b$.

Eksempel – inkrementering

$$\dfrac{\dfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{G_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u$$

Lukking etter β:

G_1	G_2
a/u	b/u

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.
- Vi introduserer v i G_2. *Hvilke nye lukkende substitusjoner har vi fått etter slutningen γ_v?*
  - G_1 *har ikke fått noen nye lukkende substitusjoner.*
  - G_2 kan etter γ_v lukkes av alle σ slik at $u\sigma = b$ eller $v\sigma = b$.
  - *Nye lukkere for* G_2 *er alle* σ *slik at* $v\sigma = b$ *og* $u\sigma \neq b$.

Eksempel – inkrementering

$$\dfrac{\overset{G_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{G_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

Lukking etter β:

G_1	G_2
a/u	b/u

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.
- Vi introduserer v i G_2. *Hvilke nye lukkende substitusjoner har vi fått etter slutningen γ_v?*
  - G_1 *har ikke fått noen nye lukkende substitusjoner.*
  - G_2 kan etter γ_v lukkes av alle σ slik at $u\sigma = b$ eller $v\sigma = b$.
  - *Nye lukkere for* G_2 *er alle* σ *slik at* $v\sigma = b$ *og* $u\sigma \neq b$.
  - *Nye lukkere for* utledningen *er alle som lukker* G_1 *og* G_2

Eksempel – inkrementering

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{\mathsf{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{\mathsf{G}_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u
$$

Lukking etter β:

G_1	G_2
a/u	b/u

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.
- Vi introduserer v i G_2. *Hvilke nye lukkende substitusjoner har vi fått etter slutningen γ_v?*
  - G_1 *har ikke fått noen nye lukkende substitusjoner.*
  - G_2 kan etter γ_v lukkes av alle σ slik at $u\sigma = b$ eller $v\sigma = b$.
  - *Nye lukkere for* G_2 *er alle σ slik at $v\sigma = b$ og $u\sigma \neq b$.*
  - *Nye lukkere for* utledningen *er alle som lukker* G_1 *og* G_2, *dvs. alle σ slik at $u\sigma = a$ og $v\sigma = b$.*

Lukkingsmengder og unifikatorer

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle grener som går gjennom sekventen.

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle grener som går gjennom sekventen.
- En substitusjon lukker en løvsekvent hvis den unifiserer et komplementært par i løvsekventen.

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle grener som går gjennom sekventen.
- En substitusjon lukker en løvsekvent hvis den unifiserer et komplementært par i løvsekventen.
- Merk: for å forenkle notasjonen gir vi ofte navn til komplementære par, f.eks. $c = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle grener som går gjennom sekventen.
- En substitusjon lukker en løvsekvent hvis den unifiserer et komplementært par i løvsekventen.
- Merk: for å forenkle notasjonen gir vi ofte navn til komplementære par, f.eks. $c = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Definisjon (Mengder av unifikatorer – Unif)

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle grener som går gjennom sekventen.
- En substitusjon lukker en løvsekvent hvis den unifiserer et komplementært par i løvsekventen.
- Merk: for å forenkle notasjonen gir vi ofte navn til komplementære par, f.eks. $c = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Definisjon (Mengder av unifikatorer – Unif)

- *Mengden av unifikatorer for et komplementært par* $c = \langle \varphi, \psi \rangle$, $\mathrm{Unif}(c)$

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle grener som går gjennom sekventen.
- En substitusjon lukker en løvsekvent hvis den unifiserer et komplementært par i løvsekventen.
- Merk: for å forenkle notasjonen gir vi ofte navn til komplementære par, f.eks. $c = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Definisjon (Mengder av unifikatorer – Unif)

- *Mengden av unifikatorer for et komplementært par* $c = \langle \varphi, \psi \rangle$, Unif$(c)$, *er mengden av alle substitusjoner* σ *slik at* $\varphi\sigma = \psi\sigma$.

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle grener som går gjennom sekventen.
- En substitusjon lukker en løvsekvent hvis den unifiserer et komplementært par i løvsekventen.
- Merk: for å forenkle notasjonen gir vi ofte navn til komplementære par, f.eks. $c = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Definisjon (Mengder av unifikatorer – Unif)

- *Mengden av unifikatorer for et komplementært par* $c = \langle \varphi, \psi \rangle$, $\mathrm{Unif}(c)$, *er mengden av alle substitusjoner* σ *slik at* $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- *Mengden av unifikatorer for en sekvent* s, $\mathrm{Unif}(s)$

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle grener som går gjennom sekventen.
- En substitusjon lukker en løvsekvent hvis den unifiserer et komplementært par i løvsekventen.
- Merk: for å forenkle notasjonen gir vi ofte navn til komplementære par, f.eks. $c = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Definisjon (Mengder av unifikatorer – Unif)

- *Mengden av unifikatorer for et komplementært par* $c = \langle \varphi, \psi \rangle$, $\mathrm{Unif}(c)$, *er mengden av alle substitusjoner* σ *slik at* $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- *Mengden av unifikatorer for en sekvent* s, $\mathrm{Unif}(s)$, *er unionen av* $\mathrm{Unif}(c)$ *for alle komplementære par* c *i* s.

Lukkingsmengder – CI

Lukkingsmengder – CI

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.

Lukkingsmengder – CI

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Lukkingsmengder – CI

- En sekvent *s* i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til *s* som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – CI)

Lukkingsmengder – CI

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – CI)

La s være en sekvent i en utledning.

Lukkingsmengder – Cl

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – Cl)

La s være en sekvent i en utledning. Vi definerer mengden av lukkende substitusjoner for grenene som går gjennom s, Cl(s), *rekursivt på følgende måte.*

Lukkingsmengder – Cl

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – Cl)

La s være en sekvent i en utledning. Vi definerer mengden av lukkende substitusjoner for grenene som går gjennom s, $\mathrm{Cl}(s)$, rekursivt på følgende måte.

- *Hvis s er en løvsekvent:*

Lukkingsmengder – Cl

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – Cl)

La s være en sekvent i en utledning. Vi definerer mengden av lukkende substitusjoner for grenene som går gjennom s, $\mathrm{Cl}(s)$, rekursivt på følgende måte.

- *Hvis s er en løvsekvent:* $\mathrm{Cl}(s) := \mathrm{Unif}(s)$

Lukkingsmengder – Cl

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – Cl)

La s være en sekvent i en utledning. Vi definerer mengden av lukkende substitusjoner for grenene som går gjennom s, $\mathsf{Cl}(s)$, rekursivt på følgende måte.

- *Hvis s er en løvsekvent:* $\mathsf{Cl}(s) := \mathsf{Unif}(s)$
- *Hvis s er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s':*

Lukkingsmengder – Cl

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – Cl)

La s være en sekvent i en utledning. Vi definerer mengden av lukkende substitusjoner for grenene som går gjennom s, $\mathsf{Cl}(s)$*, rekursivt på følgende måte.*

- *Hvis s er en løvsekvent:* $\mathsf{Cl}(s) := \mathsf{Unif}(s)$
- *Hvis s er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s':* $\mathsf{Cl}(s) := \mathsf{Cl}(s')$

Lukkingsmengder – Cl

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – Cl)

La s være en sekvent i en utledning. Vi definerer mengden av lukkende substitusjoner for grenene som går gjennom s, $\mathsf{Cl}(s)$, rekursivt på følgende måte.

- *Hvis s er en løvsekvent:* $\mathsf{Cl}(s) := \mathsf{Unif}(s)$
- *Hvis s er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s':* $\mathsf{Cl}(s) := \mathsf{Cl}(s')$
- *Hvis s er konklusjon i en β-slutning med premisser s' og s'':*

Lukkingsmengder – Cl

- En sekvent s i en utledning som ikke er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon (Lukkingsmengder – Cl)

La s være en sekvent i en utledning. Vi definerer mengden av lukkende substitusjoner for grenene som går gjennom s, $\mathrm{Cl}(s)$, rekursivt på følgende måte.

- *Hvis s er en løvsekvent:* $\mathrm{Cl}(s) := \mathrm{Unif}(s)$
- *Hvis s er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s':* $\mathrm{Cl}(s) := \mathrm{Cl}(s')$
- *Hvis s er konklusjon i en β-slutning med premisser s' og s'':* $\mathrm{Cl}(s) := \mathrm{Cl}(s') \cap \mathrm{Cl}(s'')$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\cfrac{\cfrac{3\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad 4\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{2\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{1\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{\color{green}{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \color{green}{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\color{green}{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\ \beta}{\color{green}{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\ \gamma_u$$

- For løvsekventene:

Eksempel – lukkingsmengder

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) =$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) =$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\ \beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\ \gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathsf{Cl}(3) = \mathsf{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathsf{Cl}(4) =$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) =$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{3\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad 4\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{2\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\beta}{1\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{3\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad 4\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{2\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\beta}{1\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{Cl}(2) =$

Eksempel – lukkingsmengder

$$
\cfrac{\cfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\ \beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\ \gamma_u
$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{Cl}(2) = \mathrm{Cl}(3) \cap \mathrm{Cl}(4) =$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\cfrac{\cfrac{3\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad 4\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{2\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\ \beta}{1\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\ \gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{Cl}(2) = \mathrm{Cl}(3) \cap \mathrm{Cl}(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } u\sigma = b\} =$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\ \beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\ \gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathsf{Cl}(3) = \mathsf{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathsf{Cl}(4) = \mathsf{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathsf{Cl}(2) = \mathsf{Cl}(3) \cap \mathsf{Cl}(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } u\sigma = b\} = \emptyset$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}\,\beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{Cl}(2) = \mathrm{Cl}(3) \cap \mathrm{Cl}(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } u\sigma = b\} = \emptyset$
  - $\mathrm{Cl}(1) =$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{3\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad 4\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{2\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}\beta}{1\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{Cl}(2) = \mathrm{Cl}(3) \cap \mathrm{Cl}(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } u\sigma = b\} = \emptyset$
  - $\mathrm{Cl}(1) = \mathrm{Cl}(2) = \emptyset$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathrm{Cl}(3) = \mathrm{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{Cl}(2) = \mathrm{Cl}(3) \cap \mathrm{Cl}(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } u\sigma = b\} = \emptyset$
  - $\mathrm{Cl}(1) = \mathrm{Cl}(2) = \emptyset$
- Utledningen er ikke mulig å lukke siden lukkingsmengden til rotsekventen er tom.

Nye komplementære par

Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

Nye komplementære par

Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

$$\mathbf{1}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa$$
$$\vdots$$

- Anta at sekventen 1 over er løvsekvent i en gren G i en utledning.

Nye komplementære par

Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

$$\mathbf{1}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa$$

$$\vdots$$

- Anta at sekventen 1 over er løvsekvent i en gren G i en utledning.
- Sekventen inneholder ett komplementært par: Pu, Pa

Nye komplementære par

Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

$$\dfrac{{\color{green}2}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pa}{{\color{green}1}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa}\,\gamma_v$$

$$\vdots$$

- Anta at sekventen 1 over er løvsekvent i en gren G i en utledning.
- Sekventen inneholder ett komplementært par: Pu, Pa
- Vi utvider G med en γ-slutning slik at sekventen 2 blir ny løvsekvent.

Nye komplementære par

Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

$$\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pa}{\mathbf{1}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa}\ \gamma_v$$

$$\vdots$$

- Anta at sekventen 1 over er løvsekvent i en gren G i en utledning.
- Sekventen inneholder ett komplementært par: Pu, Pa
- Vi utvider G med en γ-slutning slik at sekventen 2 blir ny løvsekvent.
- Sekvent 2 har et komplementært par Pv, Pa som ikke forekommer i 1.

Nye komplementære par

Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

$$\dfrac{\mathbf{2}\;\; \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pa}{\mathbf{1}\;\; \forall x Px, Pu \vdash Pa}\,\gamma_v$$

$$\vdots$$

- Anta at sekventen 1 over er løvsekvent i en gren G i en utledning.
- Sekventen inneholder ett komplementært par: Pu, Pa
- Vi utvider G med en γ-slutning slik at sekventen 2 blir ny løvsekvent.
- Sekvent 2 har et komplementært par Pv, Pa som ikke forekommer i 1.
- Vi sier at m.h.p. slutningen γ_v så er

Nye komplementære par

Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

$$\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pa}{\mathbf{1}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa}\ \gamma_v$$

$$\vdots$$

- Anta at sekventen 1 over er løvsekvent i en gren G i en utledning.
- Sekventen inneholder ett komplementært par: Pu, Pa
- Vi utvider G med en γ-slutning slik at sekventen 2 blir ny løvsekvent.
- Sekvent 2 har et komplementært par Pv, Pa som ikke forekommer i 1.
- Vi sier at m.h.p. slutningen γ_v så er
  - det komplementære paret Pv, Pa nytt for G

Nye komplementære par

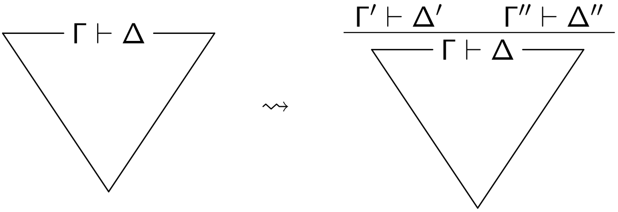
Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

$$\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pa}{\mathbf{1}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa}\ \gamma_v$$

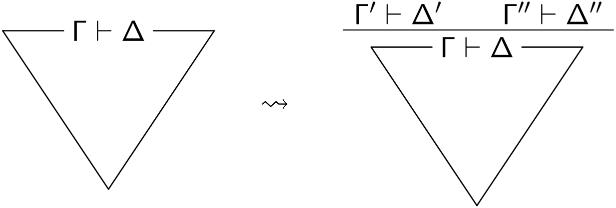
$$\vdots$$

- Anta at sekventen 1 over er løvsekvent i en gren G i en utledning.
- Sekventen inneholder ett komplementært par: Pu, Pa
- Vi utvider G med en γ-slutning slik at sekventen 2 blir ny løvsekvent.
- Sekvent 2 har et komplementært par Pv, Pa som ikke forekommer i 1.
- Vi sier at m.h.p. slutningen γ_v så er
  - det komplementære paret Pv, Pa nytt for G
  - sekventen 2 ny for G

Nye komplementære par

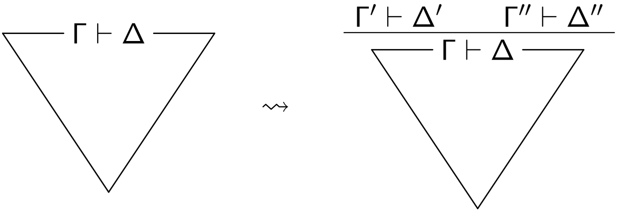


Nye komplementære par



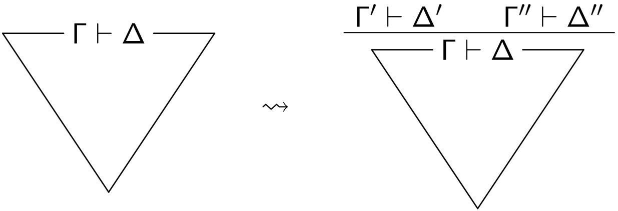
- Enhver utvidelse av en gren i en utledning kan introdusere nye komplementære par.

Nye komplementære par



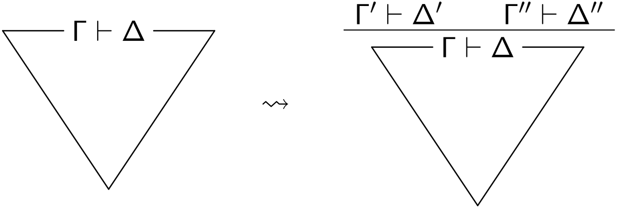
- Enhver utvidelse av en gren i en utledning kan introdusere nye komplementære par.
- Hvis vi utvider med en β-slutning, så kan begge de nye løvsekvente inneholde nye komplementære par.

Nye komplementære par



- Enhver utvidelse av en gren i en utledning kan introdusere nye komplementære par.
- Hvis vi utvider med en β-slutning, så kan begge de nye løvsekvente inneholde nye komplementære par.
- De nye komplementære parene vil imidlertid utgjøre en endelig mengde $\{c_1, \ldots, c_n\}$.

Nye komplementære par



- Enhver utvidelse av en gren i en utledning kan introdusere nye komplementære par.
- Hvis vi utvider med en β-slutning, så kan begge de nye løvsekvente inneholde nye komplementære par.
- De nye komplementære parene vil imidlertid utgjøre en endelig mengde $\{c_1, \ldots, c_n\}$.
- For hver c_i må vi beregne mengden nye lukkende substitusjoner for enhver sekvent i den utvidete utledningen.

Nye lukkende substitusjoner

Definisjon (Nye lukkende substitusjoner)

Nye lukkende substitusjoner

Definisjon (Nye lukkende substitusjoner)

La π *være en utledning.*

Nye lukkende substitusjoner

Definisjon (Nye lukkende substitusjoner)

La π være en utledning. For hver sekvent s i π la $\mathrm{Cl}_0(s)$ være mengden lukkende substitusjoner for grener som går gjennom s før vi tar hensyn til et nytt komplementært par c

Nye lukkende substitusjoner

Definisjon (Nye lukkende substitusjoner)

La π *være en utledning. For hver sekvent* s *i* π *la* $\mathsf{Cl}_0(s)$ *være mengden lukkende substitusjoner for grener som går gjennom* s *før vi tar hensyn til et nytt komplementært par* c*, og la* $\mathsf{Cl}(s)$ *være mengden lukkende substitusjoner etter at vi har tatt hensyn til* c*.*

Nye lukkende substitusjoner

Definisjon (Nye lukkende substitusjoner)

La π *være en utledning. For hver sekvent* s *i* π *la* $\mathsf{Cl}_0(s)$ *være mengden lukkende substitusjoner for grener som går gjennom* s *før vi tar hensyn til et nytt komplementært par* c*, og la* $\mathsf{Cl}(s)$ *være mengden lukkende substitusjoner etter at vi har tatt hensyn til* c*. Vi definerer mengden nye lukkende substitusjoner for* s *m.h.p.* c*,* $\mathsf{New}_c(s)$ *på følgende måte.*

Nye lukkende substitusjoner

Definisjon (Nye lukkende substitusjoner)

La π være en utledning. For hver sekvent s i π la $\mathsf{Cl}_0(s)$ være mengden lukkende substitusjoner for grener som går gjennom s før vi tar hensyn til et nytt komplementært par c, og la $\mathsf{Cl}(s)$ være mengden lukkende substitusjoner etter at vi har tatt hensyn til c. Vi definerer mengden nye lukkende substitusjoner for s m.h.p. c, $\mathsf{New}_c(s)$ på følgende måte.

$$\mathsf{New}_c(s) := \mathsf{Cl}(s) \setminus \mathsf{Cl}_0(s)$$

Nye lukkende substitusjoner

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ *beregnes på følgende måte.*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathrm{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathrm{New}_c(s)$ *beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathrm{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathrm{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ *beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la* G *være grenen med løvsekvent l.*

- *For sekventer s som ikke forekommer på* G

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.

- *For sekventer s som ikke forekommer på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ *beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la* G *være grenen med løvsekvent l.*

- *For sekventer s som ikke forekommer på* G, *så er* $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.
- *For løvsekventen l*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.

- *For sekventer s som ikke forekommer på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.*
- *For løvsekventen l så er $\mathsf{New}_c(l) = \mathsf{Unif}(c) \setminus \mathsf{Cl}_0(l)$.*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.

- *For sekventer s som ikke forekommer på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.*
- *For løvsekventen l så er $\mathsf{New}_c(l) = \mathsf{Unif}(c) \setminus \mathsf{Cl}_0(l)$.*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s'*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.

- *For sekventer s som ikke forekommer på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.*
- *For løvsekventen l så er $\mathsf{New}_c(l) = \mathsf{Unif}(c) \setminus \mathsf{Cl}_0(l)$.*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s', så er $\mathsf{New}_c(s) = \mathsf{New}_c(s')$*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.

- *For sekventer s som ikke forekommer på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.*
- *For løvsekventen l så er $\mathsf{New}_c(l) = \mathsf{Unif}(c) \setminus \mathsf{Cl}_0(l)$.*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s', så er $\mathsf{New}_c(s) = \mathsf{New}_c(s')$*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en β-slutning med premisser s' og s''*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.

- *For sekventer s som ikke forekommer på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.*
- *For løvsekventen l så er $\mathsf{New}_c(l) = \mathsf{Unif}(c) \setminus \mathsf{Cl}_0(l)$.*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s', så er $\mathsf{New}_c(s) = \mathsf{New}_c(s')$*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en β-slutning med premisser s' og s'' slik at s' er på G*

Nye lukkende substitusjoner

Lemma (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)

For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.

- *For sekventer s som ikke forekommer på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.*
- *For løvsekventen l så er $\mathsf{New}_c(l) = \mathsf{Unif}(c) \setminus \mathsf{Cl}_0(l)$.*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s', så er $\mathsf{New}_c(s) = \mathsf{New}_c(s')$*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en β-slutning med premisser s' og s'' slik at s' er på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \mathsf{New}_c(s') \cap \mathsf{Cl}_0(s'')$*

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\cfrac{\cfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\ \beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\ \gamma_u$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$

$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$
\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u}\,\beta
$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma \mid u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma \mid u\sigma = b\}$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$
\cfrac{\cfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \cfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u
$$

$$
\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}
$$
$$
\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}
$$

- Ny løvsekvent er 5

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\textbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\textbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\textbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\textbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\textbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

$$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$$
$$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{3\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{5\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{4\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{2\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{1\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u}\,\beta$$

$$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$$
$$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
    - $\mathrm{New}_c(5) =$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$
\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta
$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$

$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) =$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$
\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x P x, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x P x, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x P x, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x P x, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\mathbf{1}\ \forall x P x \vdash Pa \wedge Pb}\gamma_u}\beta
$$

$$
\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}
$$
$$
\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}
$$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b$ og $u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\cfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \cfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\cfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) =$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\cfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \cfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\cfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u}\,\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathrm{New}_c(4) =$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathrm{New}_c(4) = \mathrm{New}_c(5)$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathrm{New}_c(4) = \mathrm{New}_c(5)$
  - $\mathrm{New}_c(2) =$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

$$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$$
$$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathrm{New}_c(4) = \mathrm{New}_c(5)$
  - $\mathrm{New}_c(2) = \mathrm{Cl}_0(3) \cap \mathrm{New}_c(4) =$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$

$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathrm{New}_c(4) = \mathrm{New}_c(5)$
  - $\mathrm{New}_c(2) = \mathrm{Cl}_0(3) \cap \mathrm{New}_c(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } v\sigma = b\}$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathrm{New}_c(4) = \mathrm{New}_c(5)$
  - $\mathrm{New}_c(2) = \mathrm{Cl}_0(3) \cap \mathrm{New}_c(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } v\sigma = b\}$
  - $\mathrm{New}_c(1) =$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathrm{New}_c(4) = \mathrm{New}_c(5)$
  - $\mathrm{New}_c(2) = \mathrm{Cl}_0(3) \cap \mathrm{New}_c(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } v\sigma = b\}$
  - $\mathrm{New}_c(1) = \mathrm{New}_c(2) \neq \emptyset$

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\mathbf{3}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{\mathbf{5}\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}{\mathbf{4}\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{\dfrac{\mathbf{2}\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}{\mathbf{1}\ \forall x Px \vdash Pa \land Pb}\gamma_u}\beta$$

$\mathrm{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
$\mathrm{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathrm{Cl}_0(5) := \mathrm{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathrm{New}_c(5) = \mathrm{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathrm{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ og } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathrm{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathrm{New}_c(4) = \mathrm{New}_c(5)$
  - $\mathrm{New}_c(2) = \mathrm{Cl}_0(3) \cap \mathrm{New}_c(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } v\sigma = b\}$
  - $\mathrm{New}_c(1) = \mathrm{New}_c(2) \neq \emptyset$
- Siden $\mathrm{New}_c(1)$ er ikke-tom for rotsekventen 1, så har vi funnet en lukkende substitusjon for utledningen.

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?$(\Gamma \vdash \Delta)$

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$;

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; $rot := \Gamma \vdash \Delta$;

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?$(\Gamma \vdash \Delta)$

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; $rot := \Gamma \vdash \Delta$;

$\mathsf{Cl}(rot) := \mathsf{Unif}(rot)$;

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; $rot := \Gamma \vdash \Delta$;
$\mathsf{Cl}(rot) := \mathsf{Unif}(rot)$;
while $\mathsf{Cl}(rot) = \emptyset$ **do**

end while

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; $rot := \Gamma \vdash \Delta$;
$\mathsf{Cl}(rot) := \mathsf{Unif}(rot)$;
while $\mathsf{Cl}(rot) = \emptyset$ **do**
  if π ikke er utvidbar **then**

  end if
end while

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; *rot* $:= \Gamma \vdash \Delta$;
Cl(*rot*) := Unif(*rot*);
while Cl(*rot*) $= \emptyset$ **do**
   if π ikke er utvidbar **then**
      return *"ikke gyldig"*;
   end if
end while

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; *rot* $:= \Gamma \vdash \Delta$;
Cl(*rot*) := Unif(*rot*);
while Cl(*rot*) $= \emptyset$ **do**
  if π ikke er utvidbar **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else

  end if
end while

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; *rot* $:= \Gamma \vdash \Delta$;
Cl(*rot*) := Unif(*rot*);
while Cl(*rot*) $= \emptyset$ **do**
  if π ikke er utvidbar **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else
    $\varphi :=$ rettferdig valg av ikke-atomær formel i løvsekvent i π;

  end if
end while

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; $rot := \Gamma \vdash \Delta$;
Cl(rot) := Unif(rot);
while Cl(rot) $= \emptyset$ **do**
  if π ikke er utvidbar **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else
    φ := rettferdig valg av ikke-atomær formel i løvsekvent i π;
    utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ;
  end if
end while

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; *rot* $:= \Gamma \vdash \Delta$;
Cl(*rot*) := Unif(*rot*);
while Cl(*rot*) $= \emptyset$ **do**
  if π ikke er utvidbar **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else
    $\varphi :=$ rettferdig valg av ikke-atomær formel i løvsekvent i π;
    utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ;
    for hvert nytt komplementært par *c* **do**

    end for
  end if
end while

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; $rot := \Gamma \vdash \Delta$;
$\mathsf{Cl}(rot) := \mathsf{Unif}(rot)$;
while $\mathsf{Cl}(rot) = \emptyset$ **do**
  if π ikke er utvidbar **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else
    $\varphi :=$ rettferdig valg av ikke-atomær formel i løvsekvent i π;
    utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ;
    for hvert nytt komplementært par c **do**
      $\mathsf{Cl}(rot) := \mathsf{Cl}(rot) \cup \mathsf{New}_c(rot)$;
    end for
  end if
end while

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; $rot := \Gamma \vdash \Delta$;
$\mathsf{Cl}(rot) := \mathsf{Unif}(rot)$;
while $\mathsf{Cl}(rot) = \emptyset$ **do**
  if π ikke er utvidbar **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else
    $\varphi :=$ rettferdig valg av ikke-atomær formel i løvsekvent i π;
    utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ;
    for hvert nytt komplementært par c **do**
      $\mathsf{Cl}(rot) := \mathsf{Cl}(rot) \cup \mathsf{New}_c(rot)$;
    end for
  end if
end while
return *"gyldig"*;