Forelesning 13: Automatisk bevissøk III — fri-variabel kompletthet og inkrementelt bevissøk

Christian Mahesh Hansen - 15. mai 2006

1 Automatisk bevissøk III

1.1 Sunnhet – repetisjon

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er *sunn*.

Teorem 1.1 (Sunnhet)**.** *Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel* LK*, så er den gyldig.*

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma 1.1. *Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.*

Vi skal ta en kort repetisjon av sunnhetsargumentet.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β-reglene i fri-variabel LK bevarer *ikke* falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.
- En modell *falsifiserer* en utledning hvis ethvert valg av variabeltilordning for modellen gir en falsifisert gren.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
  - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
  - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell $\mathcal{M}$.
- For α-, β- og γ-reglene kan vi vise at $\mathcal{M}$ også falsifiserer den utvidete utledningen.
- Det holder ikke for δ-reglene. Her konstruerer vi en ny modell (basert på $\mathcal{M}$) som falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ-regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ-slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f.
- For hver variabeltilordning μ for $\mathcal{M}'$ spesifiserer vi $\mathcal{M}', \mu$ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at $\mathcal{M}', \mu$ gjør $\varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x]$ sann dersom $\mathcal{M}, \mu$ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π *og* $\mathcal{M}$ er lik $\mathcal{M}'$ utenom f, så er π falsifisert av $\mathcal{M}'$.
- Ved å bruke de semantiske definisjonene, viser vi så at $\mathcal{M}'$ falsifiserer den utvidete utledningen.

Teorem 1.2 (Sunnhet)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ *er bevisbar i fri-variabel* LK*, så er* $\Gamma \vdash \Delta$ *gyldig.*

Bevis.
- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathsf{G}^{\top}$ og $\psi \in \mathsf{G}^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

□

1.2 Kompletthet

Teorem 1.3 (Kompletthet)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel* LK*.*

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma 1.2 (Modelleksistens)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ ikke *er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Husk:

- En modell $\mathcal{M}$ *falsifiserer* $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for $\mathcal{M}$ gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under $\mathcal{M}$ være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i grunn LK.
  - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en *rettferdig strategi* til å konstruere en *grenseutledning* for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
  - enhver α-, β- og δ-formel på G er hovedformel i en slutning på G, og
  - hvis G inneholder en γ-formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G.
  - *"Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener."*
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en *åpen* gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell $\mathcal{M}$ på følgende måte:
  - Domenet til $\mathcal{M}$ er Herbrand-universet til G.
  - For lukkede termer t på G: $t^{\mathcal{M}} = t$
  - For n-ære relasjonssymboler P på G: $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{G}^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathsf{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathsf{G}^{\perp}$.
  - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{G}^{\top}$ og $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{G}^{\perp}$.
  - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
  - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i $\mathsf{G}^{\top}$ eller $\mathsf{G}^{\perp}$.
- Det følger at $\mathcal{M}$ falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq \mathsf{G}^{\top}$ og $\Delta \subseteq \mathsf{G}^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at $\mathcal{M}$ oppfyller alle formler i $\mathsf{G}^{\top}$ og falsifiserer alle formler i $\mathsf{G}^{\perp}$ gjør vi strukturell induksjon på formlene i G.
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen $\mathcal{M}$.
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:

- For α-, β- og δ-formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G, og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G.
- For γ-formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G.

- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ, kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
  - bruke en *rettferdig strategi* til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
  - anvende en *grunn* substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den *grunnede* åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ-reglene imidlertid *frie variable* istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av *rettferdig strategi*.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ-formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ-slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ-formel på en gren.

Definisjon 1.1 (Rettferdig strategi)**.** *En strategi er* rettferdig *hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:*

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*
2. *Hvis φ er en γ-formel på formen $\mathsf{Q}x\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for uendelig mange variable u.*

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall x Px$ introduserer uendelig mange frie variable u_i.
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i-formlene bli til Pa.
- Vi ser at Herbrand-universet til Gσ er $a, fa, ffa, fffa, \ldots$ Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt *ikke* er i Gσ, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra Gσ vil derfor *ikke* gjøre $\forall x Px$ sann.

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
  - $\tau(u_1) = a$, og
  - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall x Px, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\dfrac{\forall x Px, Pu_1 \vdash Qfa}{\forall x Px \vdash Qfa}}$$

- Vi har nå at $Pt \in$ Gτ for alle termer t i Herbrand-universet til Gτ.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra Gτ oppfylle $\forall x Px$.
- Vi kaller τ en *rettferdig substitusjon*.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon 1.2 (Rettferdig substitusjon)**.** *La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la* G *være en gren i π. La σ være en substitusjon.*

- *σ er* rettferdig m.h.p. en γ-formel $\mathrm{Q}x\varphi$ *i* G *hvis for alle termer t i Herbrand-universet til* G *så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ-slutning i* G *slik at $\sigma(u) = t$.*
- *σ er* rettferdig m.h.p. grenen G *hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ-formlene i* G.
- *σ er* rettferdig m.h.p. utledningen π *hvis σ er rettferdig m.h.p. hver gren i π.*

Modelleksistens for fri-variabel LK **– bevis**

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i fri-variabel LK.
  - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes *ingen* substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en *rettferdig strategi* til å lage en *grenseutledning* med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er *rettferdig* m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G. Merk at $\mathsf{G}\sigma$ kun inneholder *lukkede* formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er *lukket*. Herbrand-modellen generert fra $\mathsf{G}\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.

1.3 Inkrementelt bevissøk

Motivasjon

- Vi har nå en sunn og komplett sekventkalkyle – fri-variabel LK – der vi utsetter valg av term i γ-slutningene ved å introdusere frie variable.
- Kalkylen sier imidlertid ikke noe om *hvordan* vi skal gå fram for å søke etter bevis med kalkylen.
- Vi trenger en algoritme for bevissøk!
- Algoritmen må bestå av to operasjoner:
  1. Utvide utledningen ved å anvende fri-variabel LK-regler.
  2. Sjekke om det finnes en *lukkende substitusjon* for den gjeldende utledningen, dvs. om den gjeldende utledningen kan *lukkes*.

Problem

Hvordan veksle mellom de to operasjonene i en søkealgoritme?

Forslag til søkealgoritme

Forslag 1: Alternering

1. Utvid den gjeldende utledningen ved å anvende én LK-regel.
2. Sjekk om den gjeldende utledningen kan lukkes.

3. Hvis utledningen ikke kan lukkes, gå til 1.

- Vi har tidligere sett at selve regelanvendelsen kan utføres i konstant tid, og dermed er rimelig effektiv.
- Det er imidlertid *ikke* tilfellet med lukkingssjekken!
- Problemet å avgjøre hvorvidt det finnes en lukkende substitusjon for en fri-variabel utledning er *NP-komplett i størrelsen på løvsekventene*.
- Lukkingssjekk etter hver regelanvendelse fører derfor til en svært lite effektiv søkealgoritme.

Forslag til søkealgoritme

Forslag 2: Iterativ dybde

1. Sett en øvre grense på antall γ-slutninger i hver gren.
2. Utvid utledningen maksimalt innenfor grensen.
3. Sjekk om utledningen kan lukkes.
4. Hvis ikke, utvid grensen og start på nytt fra punkt 2.

- Her gjør vi ikke den kostbare lukkingssjekken like ofte som i forslag 1.
- Vi har imidlertid et annet problem.
- Hvis lukkingssjekken i punkt 3 feiler, så utvider vi grensen og starter hele søket på nytt. Vi mister
  - utledningen vi hadde konstruert med den gamle grensen, og
  - kunnskap om substitusjoner som lukker *deler av* utledningen, og som kanskje kan utvides til lukkende substitusjoner med den nye grensen.

Krav til søkealgoritme

- Vi ønsker at en søkealgoritme har følgende egenskaper:
  1. *Effektiv* – gjøre kostbare operasjoner så sjendent som mulig.
  2. *Tidlig terminering* – i tilfelle rotsekventen er bevisbar, ønsker vi å terminere søket så tidlig som mulig etter at det er mulig å lukke gjeldende utledning.
  3. *Ingen omstart* – vi ønsker ikke at informasjon vi opparbeider oss i løpet av bevissøket skal gå tapt p.g.a. omstart.
- Forslag 1 (alternering) har egenskap 2, men er håpløst ineffektiv.
- Forslag 2 (iterativ dybde) er bedre enn forslag 1 m.h.p. effektivitet, men har hverken egenskap 2 eller 3.
- Er det mulig å lage en effektiv algoritme som har tidlig terminering, men som ikke krever omstart?

Komplementære par bevares ved utvidelse

- Fri-variabel LK har en egenskap som tilsier at vi kan lage en effektiv søkealgoritme med de ønskede egenskapene.
- Hvis det er mulig å lukke en *løvsekvent* i en fri-variabel utledning, så har den formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta.$$
- Vi sier at paret $P(s_1, \ldots, s_n), P(t_1, \ldots, t_n)$ er *komplementært*.
- Hvis en substitusjon σ unifiserer et komplementært par på en gren, så vil σ lukke grenen uansett hvordan vi utvider den.
- Selv om vi deler grenen med en β-slutning, så vil σ lukke begge de nye grenene.
- Dette skyldes at i enhver LK-slutning så kopieres ekstraformlene inn i alle premisser i slutningen.

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathsf{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \dfrac{\overset{\mathsf{G}_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \land Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\gamma_u$$

Lukking:

G_1	G_2
a/u	b/u
	b/v

- Etter β-slutningen splittes utledningen i to grener G_1 og G_2. Disse kan lukkes hver for seg, men *ikke* samtidig.
- Vi introduserer v i G_2.
  - Grenen kan fremdeles lukkes med b/u, siden Pu og Pb er kopiert inn i den nye løvsekventen.
  - Vi kan i tillegg lukke G_2 med b/v.
- Merk: *ved utvidelse beholder vi eksisterende lukkinger av grener, samtidig som nye lukkingsmuligheter kan oppstå.*
- Utledningen i eksempelet kan lukkes med $a/u, b/v$.

Inkrementelt bevissøk

I *inkrementelt bevissøk* utnytter vi at komplementære par bevares ved utvidelse av utledningen.

- I en utledning π assosierer vi med hver sekvent s i π en mengde $\mathsf{Cl}(s)$ med substitusjoner. Mengden skal representere alle substitusjoner som lukker de *grenene* som går gjennom sekventen s i π.
- Hver gang vi utvider utledningen
  - beregner vi for hver *ny løvsekvent* og for hvert *nytt komplementært par* i løvsekventen en mengde *nye* lukkende substitusjoner for løvsekventen m.h.p. det komplementære paret,

- sender mengden nye lukkende substitusjoner nedover grenen mot rotsekventen, og
- utvider $\mathsf{Cl}(s)$ med nye lukkende substitusjonene for hver sekvent s på grenen.

- Så snart Cl-mengden til rotsekventen er ikke-tom, kan vi avslutte søket – vi har funnet en substitusjon som lukker hele utledningen.

Eksempel – inkrementering

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\mathsf{G}_1}{\forall x Px, Pu \vdash Pa} \qquad \cfrac{\overset{\mathsf{G}_2}{\forall x Px, Pv, Pu \vdash Pb}}{\forall x Px, Pu \vdash Pb}\,\gamma_v}{\forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}\,\beta}{\forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u$$

Lukking etter β:

G_1	G_2
a/u	b/u

- Vi ser igjen på utledningen etter at vi har utvidet med β-slutningen:
  - G_1 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = a$.
  - G_2 kan lukkes med alle σ slik at $u\sigma = b$.
- Vi introduserer v i G_2. *Hvilke nye lukkende substitusjoner har vi fått etter slutningen* γ_v*?*
  - G_1 *har ikke fått noen nye lukkende substitusjoner.*
  - G_2 kan etter γ_v lukkes av alle σ slik at $u\sigma = b$ *eller* $v\sigma = b$.
  - *Nye lukkere for* G_2 *er alle* σ *slik at* $v\sigma = b$ *og* $u\sigma \neq b$.
  - *Nye lukkere for* utledningen *er alle som lukker* G_1 *og* G_2, *dvs. alle* σ *slik at* $u\sigma = a$ *og* $v\sigma = b$.

Lukkingsmengder og unifikatorer

- For hver sekvent i en utledning definerer vi rekursivt mengden substitusjoner som lukker alle *grener* som går gjennom sekventen.
- En substitusjon lukker en løvsekvent hvis den unifiserer et komplementært par i løvsekventen.
- Merk: for å forenkle notasjonen gir vi ofte navn til komplementære par, f.eks. $c = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Definisjon 1.3 (Mengder av unifikatorer – Unif)**.**
- *Mengden av* unifikatorer for et komplementært par $c = \langle \varphi, \psi \rangle$, $\mathsf{Unif}(c)$, *er mengden av alle substitusjoner* σ *slik at* $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- *Mengden av* unifikatorer for en sekvent s, $\mathsf{Unif}(s)$, *er unionen av* $\mathsf{Unif}(c)$ *for alle komplementære par* c *i* s.

Lukkingsmengder – Cl

- En sekvent s i en utledning som *ikke* er løvsekvent, vil være konklusjon i en slutning θ.
- Vi definerer lukkingsmengden til s som en funksjon av lukkingsmengdene til premissene til θ.

Definisjon 1.4 (Lukkingsmengder – Cl)**.** *La s være en sekvent i en utledning. Vi definerer* mengden av lukkende substitusjoner *for grenene som går gjennom s,* $\mathsf{Cl}(s)$*, rekursivt på følgende måte.*

- *Hvis s er en løvsekvent:* $\mathsf{Cl}(s) := \mathsf{Unif}(s)$
- *Hvis s er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s':* $\mathsf{Cl}(s) := \mathsf{Cl}(s')$
- *Hvis s er konklusjon i en β-slutning med premisser s' og s'':* $\mathsf{Cl}(s) := \mathsf{Cl}(s') \cap \mathsf{Cl}(s'')$

Eksempel – lukkingsmengder

$$\cfrac{\cfrac{{}_3\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \qquad {}_4\ \forall x Px, Pu \vdash Pb}{{}_2\ \forall x Px, Pu \vdash Pa \wedge Pb}\,\beta}{{}_1\ \forall x Px \vdash Pa \wedge Pb}\,\gamma_u$$

- For løvsekventene:
  - $\mathsf{Cl}(3) = \mathsf{Unif}(Pu, Pa) = \{\sigma | u\sigma = a\}$
  - $\mathsf{Cl}(4) = \mathsf{Unif}(Pu, Pb) = \{\sigma | u\sigma = b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathsf{Cl}(2) = \mathsf{Cl}(3) \cap \mathsf{Cl}(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ og } u\sigma = b\} = \emptyset$
  - $\mathsf{Cl}(1) = \mathsf{Cl}(2) = \emptyset$
- Utledningen er ikke mulig å lukke siden lukkingsmengden til rotsekventen er tom.

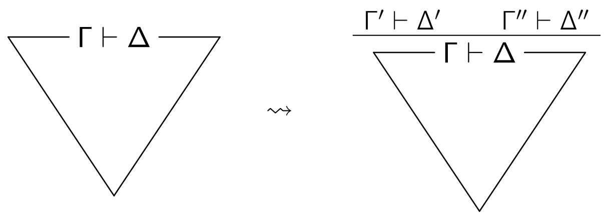
Nye komplementære par

Vi skal nå se på hvordan vi kan inkrementere lukkingsmengdene etterhvert som vi utvider utledningen.

$$\cfrac{{}_2\ \forall x Px, Pv, Pu \vdash Pa}{{}_1\ \forall x Px, Pu \vdash Pa}\,\gamma_v$$
$$\vdots$$

- Anta at sekventen 1 over er løvsekvent i en gren G i en utledning.
- Sekventen inneholder ett komplementært par: Pu, Pa
- Vi utvider G med en γ-slutning slik at sekventen 2 blir ny løvsekvent.
- Sekvent 2 har et komplementært par Pv, Pa som *ikke* forekommer i 1.
- Vi sier at m.h.p. slutningen γ_v så er
  - det komplementære paret Pv, Pa *nytt* for G
  - sekventen 2 *ny* for G

Nye komplementære par



- Enhver utvidelse av en gren i en utledning kan introdusere nye komplementære par.
- Hvis vi utvider med en β-slutning, så kan begge de nye løvsekvente inneholde nye komplementære par.
- De nye komplementære parene vil imidlertid utgjøre en *endelig* mengde $\{c_1, \ldots, c_n\}$.
- For hver c_i må vi beregne mengden *nye* lukkende substitusjoner for enhver sekvent i den utvidete utledningen.

Nye lukkende substitusjoner

Definisjon 1.5 (Nye lukkende substitusjoner)**.** *La π være en utledning. For hver sekvent s i π la $\mathsf{Cl}_0(s)$ være mengden lukkende substitusjoner for grener som går gjennom s før vi tar hensyn til et nytt komplementært par c, og la $\mathsf{Cl}(s)$ være mengden lukkende substitusjoner etter at vi har tatt hensyn til c. Vi definerer mengden* nye lukkende substitusjoner *for s m.h.p. c, $\mathsf{New}_c(s)$ på følgende måte.*

$$\mathsf{New}_c(s) := \mathsf{Cl}(s) \setminus \mathsf{Cl}_0(s)$$

Nye lukkende substitusjoner

Lemma 1.3 (Beregning av $\mathsf{New}_c(s)$)**.** *For et nytt komplementært par c kan $\mathsf{New}_c(s)$ beregnes på følgende måte. La l være løvsekventen som inneholder c, og la G være grenen med løvsekvent l.*

- *For sekventer s som ikke forekommer på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \emptyset$.*
- *For løvsekventen l så er $\mathsf{New}_c(l) = \mathsf{Unif}(c) \setminus \mathsf{Cl}_0(l)$.*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en α-, γ- eller δ-slutning med premiss s', så er $\mathsf{New}_c(s) = \mathsf{New}_c(s')$*
- *For sekventer s på G som er konklusjon i en β-slutning med premisser s' og s'' slik at s' er på G, så er $\mathsf{New}_c(s) = \mathsf{New}_c(s') \cap \mathsf{Cl}_0(s'')$*

Eksempel – nye lukkende substitusjoner

$$\dfrac{\dfrac{{}_3\ \forall xPx, Pu \vdash Pa \qquad \dfrac{{}_5\ \forall xPx, Pv, Pu \vdash Pb}{{}_4\ \forall xPx, Pu \vdash Pb}\gamma_v}{{}_2\ \forall xPx, Pu \vdash Pa \land Pb}\beta}{{}_1\ \forall xPx \vdash Pa \land Pb}\gamma_u$$

$$\mathsf{Cl}_0(3) = \{\sigma | u\sigma = a\}$$
$$\mathsf{Cl}_0(4) = \{\sigma | u\sigma = b\}$$

- Ny løvsekvent er 5 og nytt komplementært par er $c = \langle Pv, Pb \rangle$.
- Vi lar $\mathsf{Cl}_0(5) := \mathsf{Cl}_0(4)$ og får:
  - $\mathsf{New}_c(5) = \mathsf{Unif}(Pv, Pb) \setminus \mathsf{Cl}_0(5) = \{\sigma | v\sigma = b \text{ } og \text{ } u\sigma \neq b\}$
- For de andre sekventene:
  - $\mathsf{New}_c(3) = \emptyset$
  - $\mathsf{New}_c(4) = \mathsf{New}_c(5)$
  - $\mathsf{New}_c(2) = \mathsf{Cl}_0(3) \cap \mathsf{New}_c(4) = \{\sigma | u\sigma = a \text{ } og \text{ } v\sigma = b\}$
  - $\mathsf{New}_c(1) = \mathsf{New}_c(2) \neq \emptyset$
- Siden $\mathsf{New}_c(1)$ er ikke-tom for rotsekventen 1, så har vi funnet en lukkende substitusjon for utledningen.

Inkrementell søkealgoritme

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$; *rot* $:= \Gamma \vdash \Delta$;
Cl(*rot*) := Unif(*rot*);
while Cl(*rot*) $= \emptyset$ **do**
  if π ikke er utvidbar **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else
    φ := rettferdig valg av ikke-atomær formel i løvsekvent i π;
    utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ;
    for hvert nytt komplementært par c **do**
      Cl(*rot*) := Cl(*rot*) $\cup$ New_c(*rot*);
    end for
  end if
end while
return *"gyldig"*;