

INF3170 – Logikk

Forelesning 15: Avanserte emner

Roger Antonsen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

29. mai 2006



Dagens plan

- 1 Resolusjon
- 2 Dualiteter
- 3 Modallogikk på en under en halvtime
- 4 Kompakthet
- 5 Teorier, aksiomer og ufullstendighet

Overblikk

Overblikk

- John Alan Robinson, 1965.

Overblikk

- John Alan Robinson, 1965.
- Metode for å avgjøre gyldighet av formler.

Overblikk

- John Alan Robinson, 1965.
- Metode for å avgjøre gyldighet av formler.
- Populær, effektiv og enkel å implementere.

Overblikk

- John Alan Robinson, 1965.
- Metode for å avgjøre gyldighet av formler.
- Populær, effektiv og enkel å implementere.
- En av verdens raskeste teorembevisere, Vampire, bruker resolusjon.

Overblikk

- John Alan Robinson, 1965.
- Metode for å avgjøre gyldighet av formler.
- Populær, effektiv og enkel å implementere.
- En av verdens raskeste teorembevisere, Vampire, bruker resolusjon.
- Vi begynner med å se på resolusjon for utsagnslogikk.

Resolusjon: regel og utledninger

- I resolusjon har man kun én regel: **resolusjonsregelen**.

Resolusjon: regel og utledninger

- I resolusjon har man kun én regel: **resolusjonsregelen**.
 - Den forteller hvordan utleder nye klausuler fra de man har.

Resolusjon: regel og utledninger

- I resolusjon har man kun én regel: **resolusjonsregelen**.
 - Den forteller hvordan utleder nye klausuler fra de man har.
- Utledningene i resolusjon har kun én gren.

Resolusjon: regel og utledninger

- I resolusjon har man kun én regel: **resolusjonsregelen**.
 - Den forteller hvordan utleder nye klausuler fra de man har.
- Utledningene i resolusjon har kun én gren.

Definisjon

Resolusjonsregelen er

Resolusjon: regel og utledninger

- I resolusjon har man kun én regel: **resolusjonsregelen**.
 - Den forteller hvordan utleder nye klausuler fra de man har.
- Utledningene i resolusjon har kun én gren.

Definisjon

Resolusjonsregelen er

$$\begin{array}{ccc} C \cup \{A\} & & D \cup \{\neg A\} \\ & \diagdown & / \\ & C \cup D & \end{array}$$

Resolusjon: regel og utledninger

- I resolusjon har man kun én regel: **resolusjonsregelen**.
 - Den forteller hvordan utleder nye klausuler fra de man har.
- Utledningene i resolusjon har kun én gren.

Definisjon

Resolusjonsregelen er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & & D \cup \{\neg A\} \\
 \diagdown & & \diagup \\
 C \cup D & &
 \end{array}$$

hvor C og D er klausuler og A en utsagnsvariabel.

Resolusjon: regel og utledninger

- I resolusjon har man kun én regel: **resolusjonsregelen**.
 - Den forteller hvordan utleder nye klausuler fra de man har.
- Utledningene i resolusjon har kun én gren.

Definisjon

Resolusjonsregelen er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & & D \cup \{\neg A\} \\
 \diagdown & & / \\
 C \cup D & &
 \end{array}$$

*hvor C og D er klausuler og A en utsagnsvariabel. En **resolusjonsutledning** fra en mengde klausuler M er en endelig sekvens av klausuler hvor hvert element kommer fra M eller fra to foregående elementer ved anvendelse av resolusjonsregelen.*

Eksempel 1

Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.

Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.

Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.

$\{\neg P\}$ $\{P, \neg Q\}$ $\{Q\}$

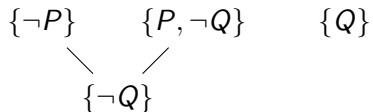
Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.

$\{\neg P\}$ $\{P, \neg Q\}$ $\{Q\}$

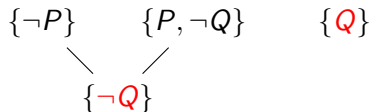
Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.



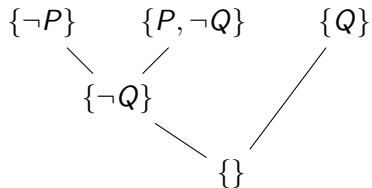
Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.



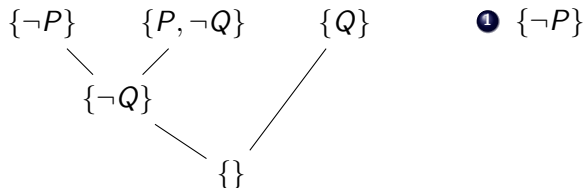
Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.



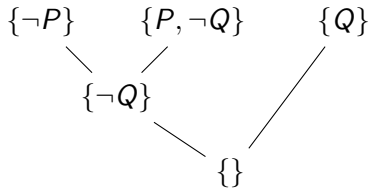
Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.



Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.

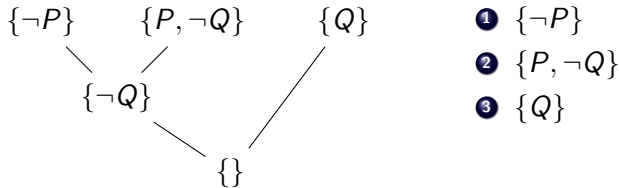


❶ $\{\neg P\}$

❷ $\{P, \neg Q\}$

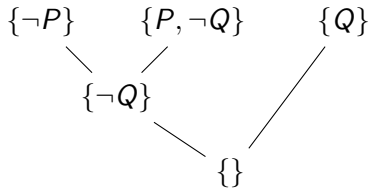
Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.



Eksempel 1

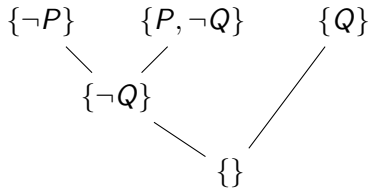
- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.



- ❶ $\{\neg P\}$
- ❷ $\{P, \neg Q\}$
- ❸ $\{Q\}$
- ❹ $\{\neg Q\}$ (fra ❶ og ❷)

Eksempel 1

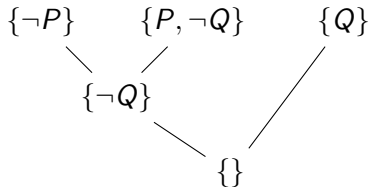
- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.



- ❶ $\{\neg P\}$
- ❷ $\{P, \neg Q\}$
- ❸ $\{Q\}$
- ❹ $\{\neg Q\}$ (fra ❶ og ❷)
- ❺ $\{\}$ (fra ❸ og ❹)

Eksempel 1

- La M bestå av klausulene $\{\neg P\}$, $\{P, \neg Q\}$ og $\{Q\}$.
- Vi kan nå anvende resolusjonsregelen og utlede $\{\}$.



- ❶ $\{\neg P\}$
- ❷ $\{P, \neg Q\}$
- ❸ $\{Q\}$
- ❹ $\{\neg Q\}$ (fra ❶ og ❷)
- ❺ $\{\}$ (fra ❸ og ❹)

- Dette brukes for å vise at $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ er gyldig.

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .
 - Anta at en resolusjonsutledning for M ender med $\{\}$.

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .
 - Anta at en resolusjonsutledning for M ender med $\{\}$.
 - Resolusjonsregelen bevarer falsifiserbarhet (av mengden av klausuler).

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .
 - Anta at en resolusjonsutledning for M ender med $\{\}$.
 - Resolusjonsregelen bevarer falsifiserbarhet (av mengden av klausuler).
 - Den tomme klausulen er ikke falsifiserbar.

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .
 - Anta at en resolusjonsutledning for M ender med $\{\}$.
 - Resolusjonsregelen bevarer falsifiserbarhet (av mengden av klausuler).
 - Den tomme klausulen er ikke falsifiserbar.
 - Matrisen M og formelen F er ikke falsifiserbar.

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .
 - Anta at en resolusjonsutledning for M ender med $\{\}$.
 - Resolusjonsregelen bevarer falsifiserbarhet (av mengden av klausuler).
 - Den tomme klausulen er ikke falsifiserbar.
 - Matrisen M og formelen F er ikke falsifiserbar.
 - F er gyldig.

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .
 - Anta at en resolusjonsutledning for M ender med $\{\}$.
 - Resolusjonsregelen bevarer falsifiserbarhet (av mengden av klausuler).
 - Den tomme klausulen er ikke falsifiserbar.
 - Matrisen M og formelen F er ikke falsifiserbar.
 - F er gyldig.
- Kompletthet.

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .
 - Anta at en resolusjonsutledning for M ender med $\{\}$.
 - Resolusjonsregelen bevarer falsifiserbarhet (av mengden av klausuler).
 - Den tomme klausulen er ikke falsifiserbar.
 - Matrisen M og formelen F er ikke falsifiserbar.
 - F er gyldig.
- Kompletthet.
 - Kan gjøres direkte ved et modelleksistensargument.

Definisjon

Et *resolusjonsbevis* for en formel F er en resolusjonsutledning fra matrisen som representerer F hvor den siste klausulen er tom.

Teorem

En formel F er gyldig hvis og bare hvis det fins et resolusjonsbevis for F .

- Sunnhet. Anta at matrisen M representerer F .
 - Anta at en resolusjonsutledning for M ender med $\{\}$.
 - Resolusjonsregelen bevarer falsifiserbarhet (av mengden av klausuler).
 - Den tomme klausulen er ikke falsifiserbar.
 - Matrisen M og formelen F er ikke falsifiserbar.
 - F er gyldig.
- Kompletthet.
 - Kan gjøres direkte ved et modelleksistensargument.
 - Kan gjøres indirekte ved oversettelse til LK.

Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.

Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$

Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.

Eksempel 2

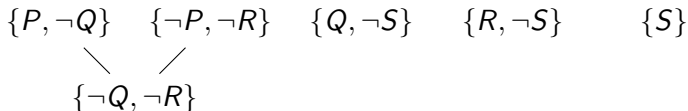
- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.
 $\{P, \neg Q\} \quad \{\neg P, \neg R\} \quad \{Q, \neg S\} \quad \{R, \neg S\} \quad \{S\}$

Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.
 $\{P, \neg Q\} \quad \{\neg P, \neg R\} \quad \{Q, \neg S\} \quad \{R, \neg S\} \quad \{S\}$

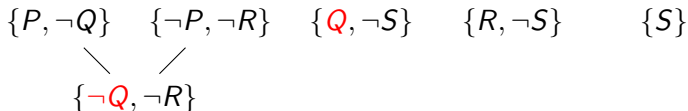
Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.



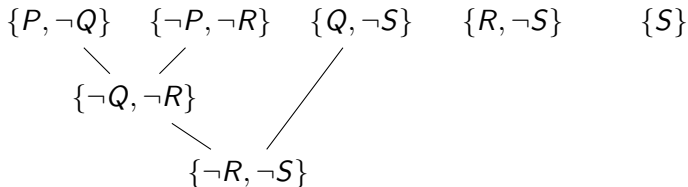
Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.



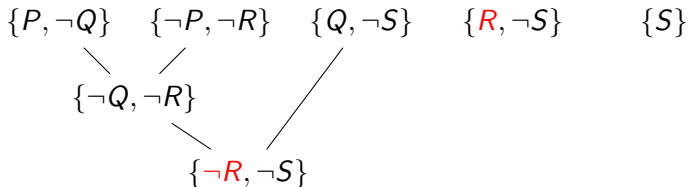
Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.



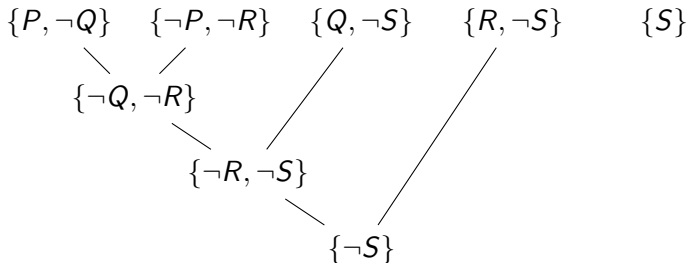
Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.



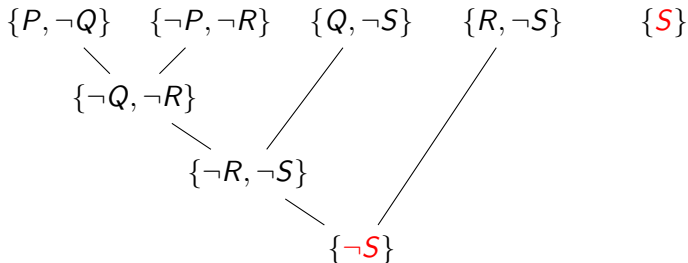
Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.



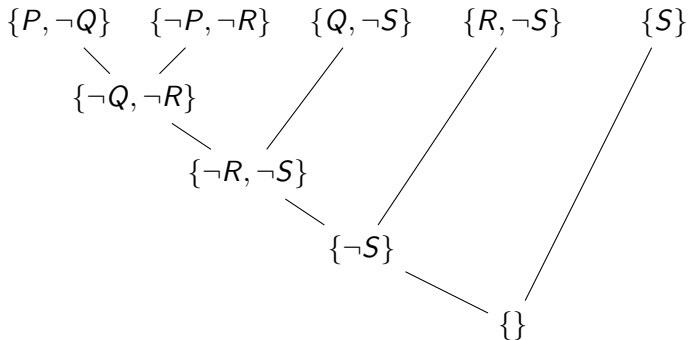
Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.



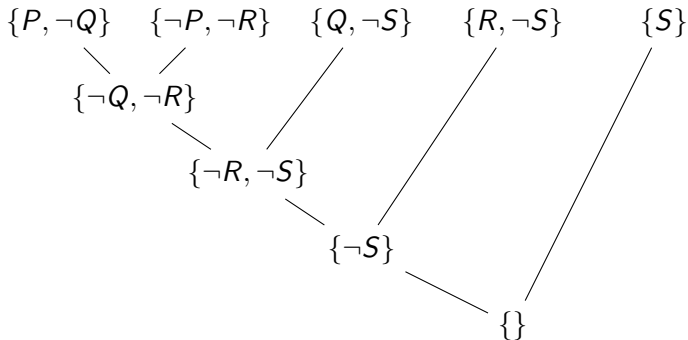
Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.



Eksempel 2

- Avgjør om $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R \rightarrow S) \rightarrow S$ er gyldig.
- Overfører til DNF: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee S$
- Mengden av klausuler: $\{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg R\}, \{Q, \neg S\}, \{R, \neg S\}, \{S\}$.



- Vi konkluderer med at formelen er gyldig!

Eksempel 3

Eksempel 3

- Merk: dette er **ikke** en resolusjonsutledning:

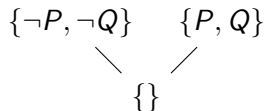
Eksempel 3

- Merk: dette er **ikke** en resolusjonsutledning:

$$\{\neg P, \neg Q\} \quad \{P, Q\}$$

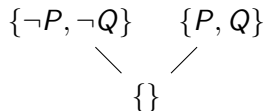
Eksempel 3

- Merk: dette er **ikke** en resolusjonsutledning:



Eksempel 3

- Merk: dette er **ikke** en resolusjonsutledning:



- Korrekt anvendelse av resolusjonsregelen gir:

Eksempel 3

- Merk: dette er **ikke** en resolusjonsutledning:

$$\begin{array}{ccc} \{\neg P, \neg Q\} & & \{P, Q\} \\ & \backslash & / \\ & & \{\} \end{array}$$

- Korrekt anvendelse av resolusjonsregelen gir:

$$\{\neg P, \neg Q\} \quad \{P, Q\}$$

Eksempel 3

- Merk: dette er **ikke** en resolusjonsutledning:

$$\begin{array}{ccc} \{\neg P, \neg Q\} & & \{P, Q\} \\ & \backslash & / \\ & & \{\} \end{array}$$

- Korrekt anvendelse av resolusjonsregelen gir:

$$\begin{array}{ccc} \{\neg P, \neg Q\} & & \{P, Q\} \\ & \backslash & / \\ & & \{\neg Q, Q\} \end{array}$$

Eksempel 3

- Merk: dette er **ikke** en resolusjonsutledning:

$$\begin{array}{ccc} \{\neg P, \neg Q\} & & \{P, Q\} \\ & \backslash & / \\ & & \{\} \end{array}$$

- Korrekt anvendelse av resolusjonsregelen gir:

$$\begin{array}{ccc} \{\neg P, \neg Q\} & & \{P, Q\} \\ & \backslash & / \\ & & \{\neg Q, Q\} \end{array}$$

- $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ er ikke gyldig.

Eksempel 3

- Merk: dette er **ikke** en resolusjonsutledning:

$$\begin{array}{ccc} \{\neg P, \neg Q\} & & \{P, Q\} \\ & \searrow & / \\ & & \{\} \end{array}$$

- Korrekt anvendelse av resolusjonsregelen gir:

$$\begin{array}{ccc} \{\neg P, \neg Q\} & & \{P, Q\} \\ & \searrow & / \\ & & \{\neg Q, Q\} \end{array}$$

- $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ er ikke gyldig.
- La f.eks. $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.

Resolusjon for første-ordens logikk

Resolusjon for første-ordens logikk

Definisjon

Resolusjonsreglene for førsteordens logikk er

Resolusjon for første-ordens logikk

Definisjon

Resolusjonsreglene for førsteordens logikk er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & & D \cup \{-B\} \\
 \diagdown & & / \\
 (C \cup D)\sigma & &
 \end{array}$$

Resolusjon for første-ordens logikk

Definisjon

Resolusjonsreglene for førsteordens logikk er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & D \cup \{\neg B\} & C \cup \{A, B\} \\
 \diagdown & \diagup & | \\
 (C \cup D)\sigma & & (C \cup \{A\})\sigma
 \end{array}$$

Resolusjon for første-ordens logikk

Definisjon

Resolusjonsreglene for førsteordens logikk er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & D \cup \{\neg B\} & C \cup \{A, B\} \\
 \diagdown & \diagup & | \\
 (C \cup D)\sigma & & (C \cup \{A\})\sigma
 \end{array}$$

hvor C og D er klausuler, A og B er atomære formler og σ er en mest generell unifikator for A og B .

Resolusjon for første-ordens logikk

Definisjon

Resolusjonsreglene for førsteordens logikk er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & D \cup \{\neg B\} & C \cup \{A, B\} \\
 \diagdown & \diagup & | \\
 (C \cup D)\sigma & & (C \cup \{A\})\sigma
 \end{array}$$

hvor C og D er klausuler, A og B er atomære formler og σ er en mest generell unifikator for A og B .

- Krever skolemisering og overføring til klausalform.

Resolusjon for første-ordens logikk

Definisjon

Resolusjonsreglene for førsteordens logikk er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & D \cup \{\neg B\} & C \cup \{A, B\} \\
 \diagdown & \diagup & | \\
 (C \cup D)\sigma & & (C \cup \{A\})\sigma
 \end{array}$$

hvor C og D er klausuler, A og B er atomære formler og σ er en mest generell unifikator for A og B .

- Krever skolemisering og overføring til klausalform.
- Unngår problemer som inkrementell lukking løser.

Resolusjon for første-ordens logikk

Definisjon

Resolusjonsreglene for førsteordens logikk er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & D \cup \{\neg B\} & C \cup \{A, B\} \\
 \diagdown & \diagup & | \\
 (C \cup D)\sigma & & (C \cup \{A\})\sigma
 \end{array}$$

hvor C og D er klausuler, A og B er atomære formler og σ er en mest generell unifikator for A og B .

- Krever skolemisering og overføring til klausalform.
- Unngår problemer som inkrementell lukking løser.
- Mengden av genererte klausuler eksploderer.

Resolusjon for første-ordens logikk

Definisjon

Resolusjonsreglene for førsteordens logikk er

$$\begin{array}{ccc}
 C \cup \{A\} & D \cup \{\neg B\} & C \cup \{A, B\} \\
 \diagdown & \diagup & | \\
 (C \cup D)\sigma & & (C \cup \{A\})\sigma
 \end{array}$$

hvor C og D er klausuler, A og B er atomære formler og σ er en mest generell unifikator for A og B .

- Krever skolemisering og overføring til klausalform.
- Unngår problemer som inkrementell lukking løser.
- Mengden av genererte klausuler eksploderer.
 - I teorembevisere er målet å ha effektiv subsumering, som løses ved hashing-teknikker (termindeksering).

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

- Det er vanlig å presentere resolusjon på den *duale* måten:

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

- Det er vanlig å presentere resolusjon på den *duale* måten:
 - Med utgangspunkt i konjunktiv normalform.

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

- Det er vanlig å presentere resolusjon på den *duale* måten:
 - Med utgangspunkt i konjunktiv normalform.
 - En klausul tolkes disjunktivt. (Klausul = disjunksjon av literaler.)

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

- Det er vanlig å presentere resolusjon på den *duale* måten:
 - Med utgangspunkt i konjunktiv normalform.
 - En klausul tolkes disjunktivt. (Klausul = disjunksjon av literaler.)
 - En matrise tolkes konjunktivt. (Matrise = konjunksjon av klausuler.)

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

- Det er vanlig å presentere resolusjon på den *duale* måten:
 - Med utgangspunkt i konjunktiv normalform.
 - En klausul tolkes disjunktivt. (Klausul = disjunksjon av literaler.)
 - En matrise tolkes konjunktivt. (Matrise = konjunksjon av klausuler.)
 - Resolusjonsregelen bevarer oppfyllbarhet i stedet for falsifiserbarhet.

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

- Det er vanlig å presentere resolusjon på den *duale* måten:
 - Med utgangspunkt i konjunktiv normalform.
 - En klausul tolkes disjunktivt. (Klausul = disjunksjon av literaler.)
 - En matrise tolkes konjunktivt. (Matrise = konjunksjon av klausuler.)
 - Resolusjonsregelen bevarer oppfyllbarhet i stedet for falsifiserbarhet.
 - Den tomme klausulen er ikke oppfyllbar.

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

- Det er vanlig å presentere resolusjon på den *duale* måten:
 - Med utgangspunkt i konjunktiv normalform.
 - En klausul tolkes disjunktivt. (Klausul = disjunksjon av literaler.)
 - En matrise tolkes konjunktivt. (Matrise = konjunksjon av klausuler.)
 - Resolusjonsregelen bevarer oppfyllbarhet i stedet for falsifiserbarhet.
 - Den tomme klausulen er ikke oppfyllbar.
 - For å avgjøre gyldigheten av en formel φ , overfører man $\neg\varphi$ til konjunktiv normalform og sjekker for oppfyllbarhet.

Konjunktiv normalform og oppfyllbarhet

- Det er vanlig å presentere resolusjon på den *duale* måten:
 - Med utgangspunkt i konjunktiv normalform.
 - En klausul tolkes disjunktivt. (Klausul = disjunksjon av literaler.)
 - En matrise tolkes konjunktivt. (Matrise = konjunksjon av klausuler.)
 - Resolusjonsregelen bevarer oppfyllbarhet i stedet for falsifiserbarhet.
 - Den tomme klausulen er ikke oppfyllbar.
 - For å avgjøre gyldigheten av en formel φ , overfører man $\neg\varphi$ til konjunktiv normalform og sjekker for oppfyllbarhet.
 - Resten er likt.

Dualiteter

Dualiteter

Oppfylbarhet

Falsifiserbarhet

Dualiteter

Oppfyllbarhet

- Søker etter bevis for $\Gamma \vdash$

Falsifiserbarhet

- Søker etter bevis for $\vdash \Gamma$

Dualiteter

Oppfyllbarhet

- Søker etter bevis for $\Gamma \vdash$
- En motmodell oppfyller Γ

Falsifiserbarhet

- Søker etter bevis for $\vdash \Gamma$
- Et motmodell falsifiserer Γ

Dualiteter

Oppfyllbarhet

- Søker etter bevis for $\Gamma \vdash$
- En motmodell oppfyller Γ
- Tablåer (vanligvis også resolusjon)

Falsifiserbarhet

- Søker etter bevis for $\vdash \Gamma$
- Et motmodell falsifiserer Γ
- Ensidig sekventkalkyle, matriser, koblingskalkyle

Dualiteter

Oppfyllbarhet

- Søker etter bevis for $\Gamma \vdash$
- En motmodell oppfyller Γ
- Tablåer (vanligvis også resolusjon)
- Konjunktiv normalform / negativ representasjon

Falsifiserbarhet

- Søker etter bevis for $\vdash \Gamma$
- Et motmodell falsifiserer Γ
- Ensidig sekventkalkyle, matriser, koblingskalkyle
- Disjunktiv normalform / positiv representasjon

Dualiteter

Oppfyllbarhet

- Søker etter bevis for $\Gamma \vdash$
- En motmodell oppfyller Γ
- Tablåer (vanligvis også resolusjon)
- Konjunktiv normalform / negativ representasjon

Falsifiserbarhet

- Søker etter bevis for $\vdash \Gamma$
- Et motmodell falsifiserer Γ
- Ensidig sekventkalkyle, matriser, koblingskalkyle
- Disjunktiv normalform / positiv representasjon

Dualitet

Dualiteter

Oppfyllbarhet

- Søker etter bevis for $\Gamma \vdash$
- En motmodell oppfyller Γ
- Tablåer (vanligvis også resolusjon)
- Konjunktiv normalform / negativ representasjon

Falsifiserbarhet

- Søker etter bevis for $\vdash \Gamma$
- Et motmodell falsifiserer Γ
- Ensidig sekventkalkyle, matriser, koblingskalkyle
- Disjunktiv normalform / positiv representasjon

Dualitet

For å finne ut om φ er gyldig, sjekk om $\neg\varphi$ er oppfyllbar.

Dualiteter

Oppfyllbarhet

- Søker etter bevis for $\Gamma \vdash$
- En motmodell oppfyller Γ
- Tablåer (vanligvis også resolusjon)
- Konjunktiv normalform / negativ representasjon

Falsifiserbarhet

- Søker etter bevis for $\vdash \Gamma$
- Et motmodell falsifiserer Γ
- Ensidig sekventkalkyle, matriser, koblingskalkyle
- Disjunktiv normalform / positiv representasjon

Dualitet

For å finne ut om φ er gyldig, sjekk om $\neg\varphi$ er oppfyllbar.
Sekventkalkylen ivaretar begge aspektene!

Modallogikk på en under en halvtime

Modallogikk på en under en halvtime

- Modale språk er enkle, men uttrykksfulle, språk for å snakke om relasjonelle strukturer.

Modallogikk på en under en halvtime

- Modale språk er enkle, men uttrykksfulle, språk for å snakke om relasjonelle strukturer.
 - Enkel syntaks og avgjørbarhet.

Modallogikk på en under en halvtime

- Modale språk er enkle, men uttrykksfulle, språk for å snakke om relasjonelle strukturer.
 - Enkel syntaks og avgjørbarhet.
 - Uttrykkskraftig nok til å fange inn aspekter ved andreordens logikk.

Modallogikk på en under en halvtime

- Modale språk er enkle, men uttrykksfulle, språk for å snakke om relasjonelle strukturer.
 - Enkel syntaks og avgjørbarhet.
 - Uttrykkskraftig nok til å fange inn aspekter ved andreordens logikk.
- Modale språk gir et internt, lokalt perspektiv på relasjonelle strukturer.

Modallogikk på en under en halvtime

- Modale språk er enkle, men uttrykksfulle, språk for å snakke om relasjonelle strukturer.
 - Enkel syntaks og avgjørbarhet.
 - Uttrykkskraftig nok til å fange inn aspekter ved andreordens logikk.
- Modale språk gir et internt, lokalt perspektiv på relasjonelle strukturer.
 - “Vi ser grafer innenfra.”

Modallogikk på en under en halvtime

- Modale språk er enkle, men uttrykksfulle, språk for å snakke om relasjonelle strukturer.
 - Enkel syntaks og avgjørbarhet.
 - Uttrykkskraftig nok til å fange inn aspekter ved andreordens logikk.
- Modale språk gir et internt, lokalt perspektiv på relasjonelle strukturer.
 - “Vi ser grafer innenfra.”
- Anbefaler *Modal Logic* av Blackburn, de Rijke og Venema (2001).

Modallogikk på en under en halvtime

Vi utvider utsagnslogikk med de **modale operatorene** \square og \diamond .

Modallogikk på en under en halvtime

Vi utvider utsagnslogikk med de **modale operatorene** \square og \diamond .

- Alle utsagnslogiske formler er formler.

Modallogikk på en under en halvtime

Vi utvider utsagnslogikk med de **modale operatorene** \Box og \Diamond .

- Alle utsagnslogiske formler er formler.
- Hvis φ er en formel, så er $\Box\varphi$ og $\Diamond\varphi$ formler.

Modallogikk på en under en halvtime

Vi utvider utsagnslogikk med de **modale operatorene** \Box og \Diamond .

- Alle utsagnslogiske formler er formler.
- Hvis φ er en formel, så er $\Box\varphi$ og $\Diamond\varphi$ formler.
- \Box og \Diamond er duale: $\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$.

Modallogikk på en under en halvtime

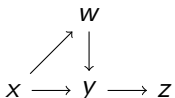
Vi utvider utsagnslogikk med de **modale operatorene** \Box og \Diamond .

- Alle utsagnslogiske formler er formler.
- Hvis φ er en formel, så er $\Box\varphi$ og $\Diamond\varphi$ formler.
- \Box og \Diamond er duale: $\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$.
- Modallogiske formler tolkes i Kripke-modeller, men vi stiller ingen krav til den binære relasjonen (partiell ordning, monotoni) slik vi gjorde for intuisjonistisk logikk.

- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.

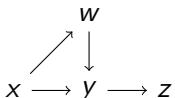
- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .

En enkel graf:



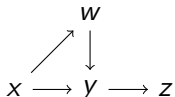
- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .

En enkel graf:



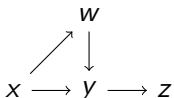
- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .
 - x kan se w og y , men kan ikke se z .

En enkel graf:



- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .
 - x kan se w og y , men kan ikke se z .
- For hvert punkt en mengde sanne utsagnsvariable.

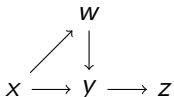
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .
 - x kan se w og y , men kan ikke se z .
- For hvert punkt en mengde sanne utsagnsvariable.

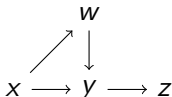
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .
 - x kan se w og y , men kan ikke se z .
- For hvert punkt en mengde sanne utsagnsvariable.
 - $x \Vdash P$ betyr at P er sann i x

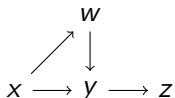
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .
 - x kan se w og y , men kan ikke se z .
- For hvert punkt en mengde sanne utsagnsvariable.
 - $x \Vdash P$ betyr at P er sann i x
- $\diamond\varphi$ uttrykker at vi kan se et punkt hvor φ er sann.

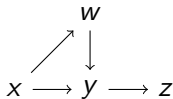
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .
 - x kan se w og y , men kan ikke se z .
- For hvert punkt en mengde sanne utsagnsvariable.
 - $x \Vdash P$ betyr at P er sann i x
- $\diamond\varphi$ uttrykker at vi kan se et punkt hvor φ er sann.
 - $x \Vdash \diamond\varphi$ betyr at det fins et punkt x' slik at xRx' og $x' \Vdash \varphi$.

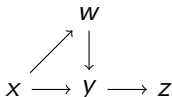
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .
 - x kan se w og y , men kan ikke se z .
- For hvert punkt en mengde sanne utsagnsvariable.
 - $x \Vdash P$ betyr at P er sann i x
- $\Diamond\varphi$ uttrykker at vi kan se et punkt hvor φ er sann.
 - $x \Vdash \Diamond\varphi$ betyr at det fins et punkt x' slik at xRx' og $x' \Vdash \varphi$.
- $\Box\varphi$ uttrykker at φ er sann i *alle* punkter vi kan se.

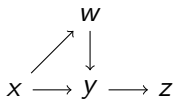
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

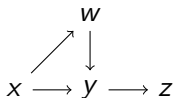
- En mengde punkter: $\{x, y, z, w\}$.
- En binær relasjon R : xRw , xRy , yRz og wRy .
 - x kan se w og y , men kan ikke se z .
- For hvert punkt en mengde sanne utsagnsvariable.
 - $x \Vdash P$ betyr at P er sann i x
- $\Diamond\varphi$ uttrykker at vi kan se et punkt hvor φ er sann.
 - $x \Vdash \Diamond\varphi$ betyr at det fins et punkt x' slik at xRx' og $x' \Vdash \varphi$.
- $\Box\varphi$ uttrykker at φ er sann i *alle* punkter vi kan se.
 - $x \Vdash \Box\varphi$ betyr at for alle punkter x' slik at xRx' , så $x' \Vdash \varphi$.

En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

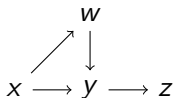
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$

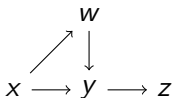
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.

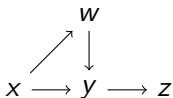
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$

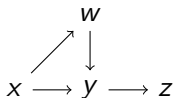
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.

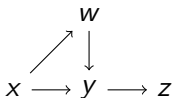
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$

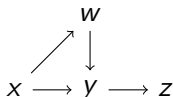
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**

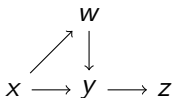
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**
- $x \Vdash \Box R$

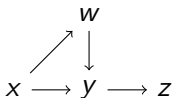
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**
- $x \Vdash \Box R$ ✓ siden både $w \Vdash R$ og $y \Vdash R$.

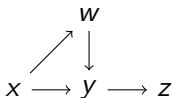
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**
- $x \Vdash \Box R$ ✓ siden både $w \Vdash R$ og $y \Vdash R$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond\Diamond S$

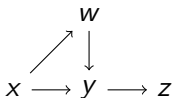
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**
- $x \Vdash \Box R$ ✓ siden både $w \Vdash R$ og $y \Vdash R$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond\Diamond S$ ✓

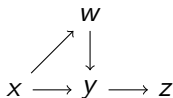
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**
- $x \Vdash \Box R$ ✓ siden både $w \Vdash R$ og $y \Vdash R$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond\Diamond S$ ✓
- $x \Vdash \Diamond\Box S$

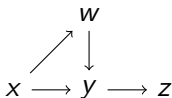
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**
- $x \Vdash \Box R$ ✓ siden både $w \Vdash R$ og $y \Vdash R$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond\Diamond S$ ✓
- $x \Vdash \Diamond\Box S$ ✓ siden xRy og $y \Vdash \Box S$.

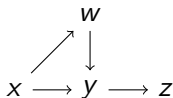
En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**
- $x \Vdash \Box R$ ✓ siden både $w \Vdash R$ og $y \Vdash R$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond\Diamond S$ ✓
- $x \Vdash \Diamond\Box S$ ✓ siden xRy og $y \Vdash \Box S$.
- $x \Vdash \Box(Q \rightarrow \Diamond S)$

En enkel graf:



punkt	sanne utsagnsvariable
x	P
y	Q, R
z	S
w	R

- $w \Vdash \Diamond Q$ ✓ siden wRy og $y \Vdash Q$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond Q$ ✓ siden xRw og $w \Vdash \Diamond Q$.
- $x \Vdash \Box Q$ **Nei, siden $w \not\Vdash Q$.**
- $x \Vdash \Box R$ ✓ siden både $w \Vdash R$ og $y \Vdash R$.
- $x \Vdash \Diamond\Diamond\Diamond S$ ✓
- $x \Vdash \Diamond\Box S$ ✓ siden xRy og $y \Vdash \Box S$.
- $x \Vdash \Box(Q \rightarrow \Diamond S)$ ✓ siden $y \Vdash \Box S$.

Lesninger av \diamond og \square

Lesninger av \diamond og \square

- 1 Nødvendighet og mulighet / metafysisk

Lesninger av \diamond og \square

- 1 Nødvendighet og mulighet / metafysisk
 - $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.

Lesninger av \diamond og \square

- 1 Nødvendighet og mulighet / metafysisk
 - $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
 - $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.

Lesninger av \diamond og \square

① Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.

Lesninger av \diamond og \square

① Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.

Lesninger av \diamond og \square

① Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?

Lesninger av \diamond og \square

① Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kolliderer modalitetene.

Lesninger av \diamond og \square

① Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kolliderer modalitetene.

② Epistemisk logikk og kunnskap

Lesninger av \diamond og \square

① Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kolliderer modalitetene.

② Epistemisk logikk og kunnskap

- $\square\varphi$, eller $K\varphi$, kan leses som 'vi vet at φ '.

Lesninger av \diamond og \square

1 Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kolliderer modalitetene.

2 Epistemisk logikk og kunnskap

- $\square\varphi$, eller $K\varphi$, kan leses som 'vi vet at φ '.
- Vi bør ha $K\varphi \rightarrow \varphi$: 'hvis vi vet at φ , så må φ være sann'

Lesninger av \diamond og \square

① Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kolliderer modalitetene.

② Epistemisk logikk og kunnskap

- $\square\varphi$, eller $K\varphi$, kan leses som 'vi vet at φ '.
- Vi bør ha $K\varphi \rightarrow \varphi$: 'hvis vi vet at φ , så må φ være sann'
- Vi bør *ikke* ha $\varphi \rightarrow K\varphi$.

Lesninger av \diamond og \square

① Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kolliderer modalitetene.

② Epistemisk logikk og kunnskap

- $\square\varphi$, eller $K\varphi$, kan leses som 'vi vet at φ '.
- Vi bør ha $K\varphi \rightarrow \varphi$: 'hvis vi vet at φ , så må φ være sann'
- Vi bør *ikke* ha $\varphi \rightarrow K\varphi$.
- Bør vi ha $K\varphi \rightarrow KK\varphi$? (positiv introspeksjon)

Lesninger av \diamond og \square

1 Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kollapser modalitetene.

2 Epistemisk logikk og kunnskap

- $\square\varphi$, eller $K\varphi$, kan leses som 'vi vet at φ '.
- Vi bør ha $K\varphi \rightarrow \varphi$: 'hvis vi vet at φ , så må φ være sann'
- Vi bør *ikke* ha $\varphi \rightarrow K\varphi$.
- Bør vi ha $K\varphi \rightarrow KK\varphi$? (positiv introspeksjon)

3 Bevisbarhetslogikk

Lesninger av \diamond og \square

1 Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kolliderer modalitetene.

2 Epistemisk logikk og kunnskap

- $\square\varphi$, eller $K\varphi$, kan leses som 'vi vet at φ '.
- Vi bør ha $K\varphi \rightarrow \varphi$: 'hvis vi vet at φ , så må φ være sann'
- Vi bør *ikke* ha $\varphi \rightarrow K\varphi$.
- Bør vi ha $K\varphi \rightarrow KK\varphi$? (positiv introspeksjon)

3 Bevisbarhetslogikk

- Vi kan lese $\square\varphi$ som ' φ er bevisbar'.

Lesninger av \diamond og \square

1 Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kollapser modalitetene.

2 Epistemisk logikk og kunnskap

- $\square\varphi$, eller $K\varphi$, kan leses som 'vi vet at φ '.
- Vi bør ha $K\varphi \rightarrow \varphi$: 'hvis vi vet at φ , så må φ være sann'.
- Vi bør *ikke* ha $\varphi \rightarrow K\varphi$.
- Bør vi ha $K\varphi \rightarrow KK\varphi$? (positiv introspeksjon)

3 Bevisbarhetslogikk

- Vi kan lese $\square\varphi$ som ' φ er bevisbar'.
- Hvordan aksiomatisere bevisbarhet?

Lesninger av \diamond og \square

1 Nødvendighet og mulighet / metafysisk

- $\diamond\varphi$ kan leses som 'det er mulig at φ '.
- $\square\varphi$ blir 'det er ikke mulig at ikke φ ' eller 'det er nødvendig at φ '.
- Vi bør ha $\square\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det som er nødvendig er mulig'.
- Vi bør også ha $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$: 'det er tilfellet, er mulig'.
- Bør vi ha $\diamond\varphi \rightarrow \square\diamond\varphi$?
- Hvis vi har $\diamond\varphi \rightarrow \square\varphi$, så kollapser modalitetene.

2 Epistemisk logikk og kunnskap

- $\square\varphi$, eller $K\varphi$, kan leses som 'vi vet at φ '.
- Vi bør ha $K\varphi \rightarrow \varphi$: 'hvis vi vet at φ , så må φ være sann'.
- Vi bør *ikke* ha $\varphi \rightarrow K\varphi$.
- Bør vi ha $K\varphi \rightarrow KK\varphi$? (positiv introspeksjon)

3 Bevisbarhetslogikk

- Vi kan lese $\square\varphi$ som ' φ er bevisbar'.
- Hvordan aksiomatisere bevisbarhet?
- Löb-formelen $\square(\square\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \square\varphi$ er sentral.

Kompakthet

Kompakthet

- Alt vi har gjort til nå har vært for endelige sekvenser, dvs. objekter på formen $\Gamma \vdash \Delta$ hvor Γ og Δ er *endelige* multimengder av formler.

Kompakthet

- Alt vi har gjort til nå har vært for endelige sekvenser, dvs. objekter på formen $\Gamma \vdash \Delta$ hvor Γ og Δ er *endelige* multimengder av formler.
- Nå tillater vi at Γ og Δ er tellbart uendelige multimengder av formler.

Kompakthet

- Alt vi har gjort til nå har vært for endelige sekvenser, dvs. objekter på formen $\Gamma \vdash \Delta$ hvor Γ og Δ er *endelige* multimengder av formler.
- Nå tillater vi at Γ og Δ er tellbart uendelige multimengder av formler.
- Alle definisjoner og resultater overføres og holder fremdeles.

Kompakthet

- Alt vi har gjort til nå har vært for endelige sekvenser, dvs. objekter på formen $\Gamma \vdash \Delta$ hvor Γ og Δ er *endelige* multimengder av formler.
- Nå tillater vi at Γ og Δ er tellbart uendelige multimengder av formler.
- Alle definisjoner og resultater overføres og holder fremdeles.
- Et bevis er fortsatt et endelig tre hvor alle grener er lukket.

Kompakthet

- Alt vi har gjort til nå har vært for endelige sekvenser, dvs. objekter på formen $\Gamma \vdash \Delta$ hvor Γ og Δ er *endelige* multimengder av formler.
- Nå tillater vi at Γ og Δ er tellbart uendelige multimengder av formler.
- Alle definisjoner og resultater overføres og holder fremdeles.
- Et bevis er fortsatt et endelig tre hvor alle grener er lukket.
- Sunnhet og kompletthet er likt:
 $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis og bare hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar.

Kompakthet

- Alt vi har gjort til nå har vært for endelige sekvenser, dvs. objekter på formen $\Gamma \vdash \Delta$ hvor Γ og Δ er *endelige* multimengder av formler.
- Nå tillater vi at Γ og Δ er tellbart uendelige multimengder av formler.
- Alle definisjoner og resultater overføres og holder fremdeles.
- Et bevis er fortsatt et endelig tre hvor alle grener er lukket.
- Sunnhet og kompletthet er likt:
 - $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis og bare hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar.
- Merk: hvis Γ og Δ er uendelige, så vil et bevis for sekvensen $\Gamma \vdash \Delta$ ha endelig mange grener. Da fins det en endelig delmengde Γ' av Γ og en endelig delmengde Δ' av Δ slik at sekvensen $\Gamma' \vdash \Delta'$ er bevisbar.

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfylldbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfylldbar.

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfyllbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfyllbar.

Bevis

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfyllbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfyllbar.

Bevis

\Rightarrow *Trivielt*

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfylldbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfylldbar.

Bevis

\Rightarrow *Trivielt*

\Leftarrow *Anta at Γ ikke er oppfylldbar.*

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfylldbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfylldbar.

Bevis

\Rightarrow *Trivielt*

\Leftarrow *Anta at Γ ikke er oppfylldbar. Da er sekventen $\Gamma \vdash$ gyldig.*

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfylldbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfylldbar.

Bevis

\Rightarrow *Trivielt*

\Leftarrow *Anta at Γ ikke er oppfylldbar. Da er sekventen $\Gamma \vdash$ gyldig. Ved kompletthet er $\Gamma \vdash$ bevisbar.*

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfylldbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfylldbar.

Bevis

\Rightarrow *Trivielt*

\Leftarrow *Anta at Γ ikke er oppfylldbar. Da er sekventen $\Gamma \vdash$ gyldig. Ved kompletthet er $\Gamma \vdash$ bevisbar. Da fins det en endelig delmengde Γ' av Γ slik at $\Gamma' \vdash$ er bevisbar.*

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfylldbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfylldbar.

Bevis

\Rightarrow *Trivielt*

\Leftarrow *Anta at Γ ikke er oppfylldbar. Da er sekventen $\Gamma \vdash$ gyldig. Ved kompletthet er $\Gamma \vdash$ bevisbar. Da fins det en endelig delmengde Γ' av Γ slik at $\Gamma' \vdash$ er bevisbar. Ved sunnhet kan ikke Γ' være oppfylldbar.*

Kompakthet

Teorem (Kompakthet)

La Γ være en mengde førsteordens formler.

Γ er oppfylldbar \Leftrightarrow enhver endelig delmengde Γ' av Γ er oppfylldbar.

Bevis

\Rightarrow *Trivielt*

\Leftarrow *Anta at Γ ikke er oppfylldbar. Da er sekventen $\Gamma \vdash$ gyldig. Ved kompletthet er $\Gamma \vdash$ bevisbar. Da fins det en endelig delmengde Γ' av Γ slik at $\Gamma' \vdash$ er bevisbar. Ved sunnhet kan ikke Γ' være oppfylldbar. Da fins en endelig delmengde av Γ som ikke er oppfylldbar.*

En anvendelse av kompakthet

En anvendelse av kompakthet

Lemma

Hvis en mengde Γ har vilkårlig store endelige modeller, så har Γ en uendelig modell.

En anvendelse av kompakthet

Lemma

Hvis en mengde Γ har vilkårlig store endelige modeller, så har Γ en uendelig modell.

Bevis

En anvendelse av kompakthet

Lemma

Hvis en mengde Γ har vilkårlig store endelige modeller, så har Γ en uendelig modell.

Bevis

La φ_n være en formel som uttrykker at 'det fins minst n elementer'.

En anvendelse av kompakthet

Lemma

Hvis en mengde Γ har vilkårlig store endelige modeller, så har Γ en uendelig modell.

Bevis

La φ_n være en formel som uttrykker at 'det fins minst n elementer'. (Vi kan anta at vi har likhet i språket.)

En anvendelse av kompakthet

Lemma

Hvis en mengde Γ har vilkårlig store endelige modeller, så har Γ en uendelig modell.

Bevis

La φ_n være en formel som uttrykker at 'det fins minst n elementer'. (Vi kan anta at vi har likhet i språket.) La $\Gamma^ = \Gamma \cup \{\varphi_n \mid 1 \leq n\}$.*

En anvendelse av kompakthet

Lemma

Hvis en mengde Γ har vilkårlig store endelige modeller, så har Γ en uendelig modell.

Bevis

La φ_n være en formel som uttrykker at 'det fins minst n elementer'. (Vi kan anta at vi har likhet i språket.) La $\Gamma^ = \Gamma \cup \{\varphi_n \mid 1 \leq n\}$. Siden Γ har vilkårlig store endelige modeller, må hver endelig delmengde av Γ^* være oppfylldbar.*

En anvendelse av kompakthet

Lemma

Hvis en mengde Γ har vilkårlig store endelige modeller, så har Γ en uendelig modell.

Bevis

La φ_n være en formel som uttrykker at 'det fins minst n elementer'. (Vi kan anta at vi har likhet i språket.) La $\Gamma^ = \Gamma \cup \{\varphi_n \mid 1 \leq n\}$. Siden Γ har vilkårlig store endelige modeller, må hver endelig delmengde av Γ^* være oppfylldbar. Ved kompakthet må Γ^* være oppfylldbar.*

En anvendelse av kompakthet

Lemma

Hvis en mengde Γ har vilkårlig store endelige modeller, så har Γ en uendelig modell.

Bevis

La φ_n være en formel som uttrykker at 'det fins minst n elementer'. (Vi kan anta at vi har likhet i språket.) La $\Gamma^ = \Gamma \cup \{\varphi_n \mid 1 \leq n\}$. Siden Γ har vilkårlig store endelige modeller, må hver endelig delmengde av Γ^* være oppfylldbar. Ved kompakthet må Γ^* være oppfylldbar. Modellen som oppfyller Γ^* må være uendelig, siden den oppfyller φ_n for alle n .*

En anvendelse av kompakthet

Teorem

En anvendelse av kompakthet

Teorem

Det fins ingen mengde formler Γ som er slik at Γ er sann i alle og bare de endelige modellene.

En anvendelse av kompakthet

Teorem

Det fins ingen mengde formler Γ som er slik at Γ er sann i alle og bare de endelige modellene. Med andre ord: endelighet er ikke aksiomatiserbart i førsteordens logikk.

En anvendelse av kompakthet

Teorem

Det fins ingen mengde formler Γ som er slik at Γ er sann i alle og bare de endelige modellene. Med andre ord: endelighet er ikke aksiomatiserbart i førsteordens logikk.

Bevis

Følger umiddelbart fra forrige Lemma.

En anvendelse av kompakthet

Teorem

Det fins ingen mengde formler Γ som er slik at Γ er sann i alle og bare de endelige modellene. Med andre ord: endelighet er ikke aksiomatiserbart i førsteordens logikk.

Bevis

Følger umiddelbart fra forrige Lemma. Siden Γ har vilkårlig store endelige modeller, må Γ ha en uendelig modell.

Teorier og aksiomer

Teorier og aksiomer

Definisjon (Teori)

Teorier og aksiomer

Definisjon (Teori)

En *teori* er en mengde formel T som er lukket under logisk konsekvens:
hvis $T \models \varphi$, så er $\varphi \in T$.

Teorier og aksiomer

Definisjon (Teori)

En *teori* er en mengde formel T som er lukket under logisk konsekvens: hvis $T \models \varphi$, så er $\varphi \in T$.

- Ved sunnhet og kompletthet så er dette det samme som å si: hvis sekventen $T \vdash \varphi$ er bevisbar, så $\varphi \in T$.

Teorier og aksiomer

Definisjon (Teori)

En *teori* er en mengde formler T som er lukket under logisk konsekvens: hvis $T \models \varphi$, så er $\varphi \in T$.

- Ved sunnhet og kompletthet så er dette det samme som å si: hvis sekventen $T \vdash \varphi$ er bevisbar, så $\varphi \in T$.

Definisjon (Aksiom)

En mengde Γ slik at $T = \{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\}$ kalles en *aksiommengde* for teorien T . Elementene i Γ kalles *aksiomer*.

Fullstendighet og konsistens

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

*En teori T er **fullstendig***

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

*En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ;*

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

*En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.*

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er *fullstendig* hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er *inkonsistent*

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ;

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ; ellers er teorien **konsistent**.

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ; ellers er teorien **konsistent**.

- Vi kan lage fullstendige teorier for mange områder av matematikken.

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ; ellers er teorien **konsistent**.

- Vi kan lage fullstendige teorier for mange områder av matematikken.
 - Teorien for grafer.

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ; ellers er teorien **konsistent**.

- Vi kan lage fullstendige teorier for mange områder av matematikken.
 - Teorien for grafer.
 - Teorien for boolske algebraer.

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ; ellers er teorien **konsistent**.

- Vi kan lage fullstendige teorier for mange områder av matematikken.
 - Teorien for grafer.
 - Teorien for boolske algebraer.
 - Teorien for algebraisk lukkede kropp.

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ; ellers er teorien **konsistent**.

- Vi kan lage fullstendige teorier for mange områder av matematikken.
 - Teorien for grafer.
 - Teorien for boolske algebraer.
 - Teorien for algebraisk lukkede kroppar.
 - Teorien for tett ordnede mengder uten endepunkter.

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ; ellers er teorien **konsistent**.

- Vi kan lage fullstendige teorier for mange områder av matematikken.
 - Teorien for grafer.
 - Teorien for boolske algebraer.
 - Teorien for algebraisk lukkede kroppar.
 - Teorien for tett ordnede mengder uten endepunkter.
 - Presburgeraritmetikk (bare pluss, ikke gange).

Fullstendighet og konsistens

Definisjon (Fullstendig teori)

En teori T er **fullstendig** hvis for enhver formel φ i språket, så er enten φ eller $\neg\varphi$ med i T ; ellers kalles teorien ufullstendig.

Definisjon (Konsistent teori)

En teori T er **inkonsistent** hvis både φ og $\neg\varphi$ er med i T , for en formel φ ; ellers er teorien **konsistent**.

- Vi kan lage fullstendige teorier for mange områder av matematikken.
 - Teorien for grafer.
 - Teorien for boolske algebraer.
 - Teorien for algebraisk lukkede kroppar.
 - Teorien for tett ordnede mengder uten endepunkter.
 - Presburgeraritmetikk (bare pluss, ikke gange).
- Mål: å lage en fullstendig teori for all matematikk!

Peanoaritmetikk

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$
 - $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$
 - $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$
- Aksiomer for multiplikasjon

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$
 - $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$
- Aksiomer for multiplikasjon
 - $\forall x(x \cdot 0 = 0)$

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$
 - $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$
- Aksiomer for multiplikasjon
 - $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
 - $\forall x\forall y(x \cdot Sy = (x \cdot y) + x)$

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$
 - $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$
- Aksiomer for multiplikasjon
 - $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
 - $\forall x\forall y(x \cdot Sy = (x \cdot y) + x)$
- Induksjonsaksiomet

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$
 - $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$
- Aksiomer for multiplikasjon
 - $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
 - $\forall x\forall y(x \cdot Sy = (x \cdot y) + x)$
- Induksjonsaksiomet
 - $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$,
for hver formel $\varphi(x)$ med høyst x fri.

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$
 - $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$
- Aksiomer for multiplikasjon
 - $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
 - $\forall x\forall y(x \cdot Sy = (x \cdot y) + x)$
- Induksjonsaksiomet
 - $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$,
for hver formel $\varphi(x)$ med høyst x fri.
- Peanoaritmetikk er teorien vi får fra denne mengden av aksiomer.

Peanoaritmetikk

- Aksiomer for suksessor
 - $\forall x(Sx \neq 0)$
 - $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
 - $(\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = Sy)))$
- Aksiomer for addisjon
 - $\forall x(x + 0 = x)$
 - $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$
- Aksiomer for multiplikasjon
 - $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
 - $\forall x\forall y(x \cdot Sy = (x \cdot y) + x)$
- Induksjonsaksiomet
 - $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$,
for hver formel $\varphi(x)$ med høyst x fri.
- Peanoaritmetikk er teorien vi får fra denne mengden av aksiomer.
- Uten induksjonsaksiomet får vi **Robinsonaritmetikk**.

Ufullstendighet

Ufullstendighet

- Kurt Gödel beviste i 1931 sitt berømte ufullstendighetsteorem.

Ufullstendighet

- Kurt Gödel beviste i 1931 sitt berømte ufullstendighetsteorem.

Teorem (Gödels første ufullstendighetsteorem)

Enhver konsistent, aksiomatisk teori som er tilstrekkelig sterk er ufullstendig.

Ufullstendighet

- Kurt Gödel beviste i 1931 sitt berømte ufullstendighetsteorem.

Teorem (Gödels første ufullstendighetsteorem)

Enhver konsistent, aksiomatisk teori som er tilstrekkelig sterk er ufullstendig.

- Tilstrekkelig sterk betyr at vi kan bevise grunnleggende påstander om pluss og gange. Robinsonaritmetikk er tilstrekkelig.

Ufullstendighet

- Kurt Gödel beviste i 1931 sitt berømte ufullstendighetsteorem.

Teorem (Gödels første ufullstendighetsteorem)

Enhver konsistent, aksiomatisk teori som er tilstrekkelig sterk er ufullstendig.

- Tilstrekkelig sterk betyr at vi kan bevise grunnleggende påstander om pluss og gange. Robinsonaritmetikk er tilstrekkelig.
- Hvis teorien er sterk nok, så fins det *alltid* en påstand ikke kan bevises i teorien.

Ufullstendighet

- Kurt Gödel beviste i 1931 sitt berømte ufullstendighetsteorem.

Teorem (Gödels første ufullstendighetsteorem)

Enhver konsistent, aksiomatisk teori som er tilstrekkelig sterk er ufullstendig.

- Tilstrekkelig sterk betyr at vi kan bevise grunnleggende påstander om pluss og gange. Robinsonaritmetikk er tilstrekkelig.
- Hvis teorien er sterk nok, så fins det *alltid* en påstand ikke kan bevises i teorien.
- I alle tilstrekkelig sterke tallteorier vil det finnes påstander som er sanne (i standardmodellen) men som ikke er bevisbare.

Avslutning

Avslutning

- Dette er siste forelesning...

Avslutning

- Dette er siste forelesning...
- Resten av tiden setter vi av til diskusjon og spørsmål.

Avslutning

- Dette er siste forelesning...
- Resten av tiden setter vi av til diskusjon og spørsmål.

Takk for følget!