INF3170 – Logikk

Obligatorisk oppgave 1

Oppgave 1 Sjekk om det finnes bevis for følgede sekventer. Gi beviset for sekventen eller konstruer en motmodell. Hvilket teorem bruker vi for å konkludere fra at det fins en motmodell til at det ikke fins noe bevis?

a. $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

b. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

c. $\vdash (A \lor B) \to ((\neg A \land B) \lor (A \land \neg B))$

d. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C))$

Oppgave 2 Vis at en utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis sekventen $\vdash A$ er gyldig.

Oppgave 3 Vis at $\neg A \Leftrightarrow A \to \bot$. (Dvs.: $\neg A$ er sann hvis og bare hvis $A \to \bot$ er sann.) Argumenter semantisk. $\bot$ er et symbol som falsifiseres av alle boolske valuasjoner.

Oppgave 4 Vi sier at en sekventkalkyleregel er *falsifikasjonsbevarende* (oppover) hvis minst ett av premissene er falsifiserbare hver gang konklusjonen er falsifiserbar. Tilsvarende sier vi at en sekventkalkyleregel er *gyldighetsbevarende* (nedover) hvis konklusjonen er gyldig hver gang begge premissene er gyldige. Se på $\mathsf{L}\lor$-regelen:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

a. Vis at $\mathsf{L}\lor$ er gyldighetsbevarende.

b. Vis at en sekventkalkyleregel er falsifikasjonsbevarende hvis og bare hvis den er gyldighetsbevarende.

Oppgave 5 Vi sier at en mengde utsagnslogiske formler er *oppfyllbar* hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller alle formlene i mengden. En *motmodell* til en mengde utsagnslogiske formler er en boolsk valuasjon som falsifiserer alle formlene i mengden. Vi definerer $\Delta^\perp = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Delta\}$. Vis at:

a. $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis og bare hvis $\Gamma \cup \Delta^\perp$ ikke er oppfyllbar.

b. $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis og bare hvis $\Gamma^\perp \cup \Delta$ ikke har en motmodell.