INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 2

1. februar 2006

Utsagnslogikk

Oppgave 1 Finn for hver av formlene nedenfor én valuasjon som falsifiserer formelen og én valuasjon som oppfyller den.

a. P

b. $\neg P$

c. $P \wedge Q$

d. $P \vee Q$

e. $P \rightarrow Q$

f. $((P \rightarrow Q) \vee (R \vee P)) \wedge \neg Q$

Oppgave 2 Sett opp en sannhetsverditabell som viser at

a. $P \rightarrow Q$ er sann hvis og bare hvis $\neg P \vee Q$ er sann.

b. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ er en tautologi.

Oppgave 3 La S være en delmengde av utsagnsvariablene, og la v_1 og v_2 være boolske valuasjoner slik at $v_1(P) = v_2(P)$ for alle $P \in S$. Vis ved strukturell induksjon på $\mathcal{F}_u$ at $v_1(A) = v_2(A)$ for alle utsagnslogiske formler A som bare inneholder utsagnsvariable fra S.

Oppgave 4 La v_1 og v_2 være boolske valuasjoner slik at hvis $v_1(P) = \mathbf{1}$, så er $v_2(P) = \mathbf{1}$ for alle utsagnsvariable P.

a. Vis at hvis A er en utsagnslogisk formel som *ikke* inneholder noen andre konnektiver enn $\wedge$ og $\vee$, og $v_1(A) = \mathbf{1}$, så er $v_2(A) = \mathbf{1}$.

b. Holder det at hvis A ikke inneholder andre konnektiver enn $\wedge$ og $\vee$, og $v_2(A) = \mathbf{1}$, så er $v_1(A) = \mathbf{1}$? Begrunn svaret ditt.

Merk i de påfølgende oppgaver at Gallier bruker litt andre symboler og begreper enn i kurset. Ekvivalens skrives '$\equiv$': $A \equiv B$ er sann hvis og bare hvis $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ er sann. Konstanten $\perp$ falsifiseres av alle valuasjoner. Konstanten $\top$ oppfylles av alle valuasjoner. Gallier skriver "proposition" om utsagnslogisk formel, "propositional letter" om utsagnsvariabel og '$\rightarrow$' som '$\supset$'.

Oppgave 5 Gjør oppgave 3.3.1 på side 54/55 i Gallier.

Merk at hvis Γ[1] er en mengde utsagnslogiske formler og A er en utsagnslogisk formel, så holder $\Gamma \models A$ hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller A.

Oppgave 6 Gjør oppgave 3.3.11 på side 57 i Gallier.

Oppgave 7 Gjør oppgave 3.3.12 b) på side 57 i Gallier.

Oppgave 8 La A og B være utsagnslogiske formler. Se på følgende påstander:

(1) A er sann hvis og bare hvis B er sann.

(2) A er en tautologi hvis og bare hvis B er en tautologi.

Lag et bevis eller finn et moteksempel til hver av påstandene nedenfor.

a. Påstand (1) følger fra påstand (2).

b. Påstand (2) følger fra påstand (1).

Hvis F er en utsagnslogisk formel og P en utsagnsvariabel, så betyr notasjonen $F(P)$ at eventuelle forekomster av P i F har en spesiell betydning. Hvis vi senere skriver $F(A)$ der A er en utsagnslogisk formel, så betegner $F(A)$ formelen F der alle forekomster av P er erstattet med A. Merk at P ikke trenger å forekomme i $F(P)$. Hvis $F(Q) = P \wedge Q$ så blir $F(\neg R) = P \wedge \neg R$. Hvis $F(Q) = P \wedge \neg P$ så er $F(\neg R) = P \wedge \neg P$.

Oppgave 9 La $F(P)$, A og B være utsagnslogiske formler.

a. Vis at hvis A er ekvivalent med B, så er $F(A)$ ekvivalent med $F(B)$. *Hint: Vis ved induksjon på $F(P)$ at $v(A) = v(B)$ impliserer $v(F(A)) = v(F(B))$ for alle utsagnslogiske formler A, B og alle boolske valuasjoner v.*

b. Anta nå at $A \rightarrow B$ er en tautologi. Ta stilling til om $F(A) \rightarrow F(B)$ er en tautologi. Finn et bevis eller et moteksempel. *Hint: $P \rightarrow R$ impliserer ikke $(P \vee Q) \rightarrow R$.*

[1] Uttales "gamma".