

# INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 3

10. februar 2006

## Sekventkalkyle for utsagnslogikk

**Oppgave 1** Gi sekventkalkylebevis for følgende sekventer:

- $\neg\neg P \vdash P$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$
- $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$

**Oppgave 2** Vi minner om at en sekventkalkyleregul er *falsifikasjonsbevarende* (oppover) hvis minst ett av premissene er falsifiserbare hver gang konklusjonen er falsifiserbar. Vis at følgende LK-regler er falsifikasjonsbevarende:  $L\neg$ ,  $R\vee$ ,  $R\rightarrow$ ,  $L\wedge$  og  $R\wedge$ .

**Oppgave 3** Vi definerer de *strukturelle LK-reglene* som følger:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ LW} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{ RW}$$
$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ LC} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{ RC}$$
$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ Cut}$$

Reglene LW og RW kalles *tynningsregler* (fra engelsk “weakening”). Navnet er motivert fra å lese regelen ovenfra og ned. Da ser vi at sekventen tynnes ved å legge til formler på henholdsvis venstre og høyre side av sekventtegnet. Reglene LC og RC kalles *kontraksjonsregler* (fra engelsk “contraction”). Lest ovenfra og ned ser vi at vi slår sammen to forekomster av en formel i premisset til én forekomst i konklusjonen. Regelen Cut kalles *snittregel*. Den fanger inn det å bruke lemmaer, eller hjelpesetninger, i matematiske bevis.

Legg merke til at både kontraksjonsreglene og snittregelen gjør at premissene blir mer komplekse enn konklusjonen. Hvis vi skal bruke disse formlene i automatisk bevissøk, så vil søke ikke terminere (med mindre vi lager strategier for hvordan vi bruker kontraksjon og snitt).

- Vis at de strukturelle reglene er falsifikasjonsbevarende oppover.
- Sekventkalkylen LK er *komplett* hvis enhver gyldig sekvent er bevisbar. Gjør deg opp noen tanker om hvorvidt vi trenger å ha med de strukturelle reglene for å få en komplett sekventkalkyle for utsagnslogikk.