INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 6

Oppgave 1 (Rekursive definisjoner)

1. Skriv ut hele den rekursive definisjonen av mengden av frie variable i en formel.
2. Definer rekursivt mengden $\mathsf{BV}(\varphi)$ av *bundne* variable i en formel φ.
3. Skriv ut hele den rekursive definisjonen av tolkningen av en lukket term.

Oppgave 2 (Førsteordens formler)

Finn førsteordens formler i språket $\langle -; -; \mathsf{Lat}, \mathsf{IfiStud}, \mathsf{Problemer}\rangle$ for følgende setninger.

1. Alle Ifi-studenter er late.
2. Ingen Ifi-studenter er late.
3. Noen Ifi-studenter er late.
4. Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen.
5. Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen.

Finn førsteordens formler i språket $\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; -; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}\rangle$ for følgende setninger.

1. Ola er far til Kari
2. Kari er mor til noen
3. Ola har ingen mor
4. Alle har en mor og en far
5. Alle har en mormor
6. Ingen er både mor og far

Oppgave 3 (Induksjon) Vi har definert strukturell induksjon for $\mathcal{F}_u$, mengden av utsagnslogiske formler. Forklar hvordan strukturell induksjon blir for $\mathcal{T}$, mengden av termer, og for $\mathcal{F}$, mengden av førsteordens formler (for et gitt språk $\mathcal{L}$).

1. La φ være en førsteordens formel, a og b to konstanter og x og y to forskjellige variable. Vis at $\varphi[a/x][b/y] = \varphi[b/y][a/x]$. (Oppgave 5.2.3 fra Gallier.)
2. Vis at for enhver formel φ og enhver konstant c, så $\text{FV}(\varphi[c/x]) = \text{FV}(\varphi) \setminus \{x\}$. (Oppgave 5.2.4 fra Gallier.)
3. Vis at for enhver formel φ og term t, hvis y ikke er i $FV(\varphi)$, så $\varphi[t/y] = \varphi$. (Oppgave 5.2.5 fra Gallier.)

Oppgave 4 (Gyldighet/oppfyllbarhet)

Vis at følgende formler er oppfyllbare. (Spesifiser en modell for hver formel - i det underliggende språket - som oppfyller denne formelen.)

- $\exists x \text{Liten}(x)$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \wedge \text{Stor}(x))$
- $\exists x Px \to \forall x Px$

Vis at følgende formler ikke er oppfyllbare. (Hint: Anta at formelen *er* oppfyllbar.)

- $Pa \wedge \neg Pa$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \wedge \neg\text{Liten}(x))$
- $\neg\text{Stor}(a) \wedge \forall x \text{Stor}(x)$

Vis at følgende formler er gyldige. (Hint: Velg en vilkårlig modell.)

- $\forall x Pxa \to \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \to \forall x Px$
- $\exists x \text{Liten}(x) \vee \exists x \neg\text{Liten}(x)$

Vis at følgende formler er falsifiserbare. (Spesifiser en modell for hver formel - i det underliggende språket - som falsifiserer denne formelen.)

- $\forall x Px$
- $\exists x \text{Stor}(x) \to \forall x \text{Stor}(x)$
- $\exists x Px \to \exists x(Px \wedge Qx)$