INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 7

Normalformer

Negasjons normalform

I dette oppgavesettet skal vi se nærmere på *normalformer*. Formelen $\neg(P \wedge Q)$ kan også skrives som $\neg P \vee \neg Q$. Formlene er *ekvivalente*, dvs. at $\neg(P \wedge Q)$ sann hvis og bare hvis $\neg P \vee \neg Q$ er sann. I formelen $\neg P \vee \neg Q$ forekommer negasjonstegnet ($\neg$) kun foran atomære formler. Vi sier at formler med denne egenskapen er på *negasjons normalform*. Merk at definisjonene nedenfor gjelder både for utsagnslogiske og førsteordens formler.

Definisjon 0.1 (Negasjons normalform – NNF)**.** *En formel er på negasjons normalform (NNF) hvis negasjonstegnet kun forekommer foran atomære delformler.*

Teorem 0.1. *Enhver formel kan skrives om til en ekvivalent formel på negasjons normalform.*

Vi skal ikke se på beviset for teoremet, men nøye oss med å liste opp følgende ekvivalenser, som lett kan verifiseres med f.eks. sannhetsverditabeller når formlene er utsagnslogiske.

(1) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$

(2) $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

(3) $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$

(4) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$

I tillegg har vi følgende ekvivalenser for kvantorer.

(5) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$

(6) $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

Lest fra venstre mot høyre kan ekvivalensene 1–6 sees på som omskrivingsregler. La oss se på et eksempel der vi illustrerer hva vi mener. Formelen $\neg\forall x(Px \rightarrow \exists yQy)$ kan omskrives på følgende måte:

$$\begin{array}{rcl} \neg\forall x(Px \to \exists y Qy) & \rightsquigarrow & \exists x \neg(Px \to \exists y Qy) \\ & \rightsquigarrow & \exists x \neg(\neg Px \vee \exists y Qy) \\ & \rightsquigarrow & \exists x(\neg\neg Px \wedge \neg\exists y Qy) \\ & \rightsquigarrow & \exists x(Px \wedge \neg\exists y Qy) \\ & \rightsquigarrow & \exists x(Px \wedge \forall y \neg Qy) \end{array}$$

Her brukes ekvivalensene 5, 2, 4, 1 og deretter 6 som omskrivingsregler for å komme fram til resultatformelen på negasjons normalform.

Oppgave 1 (Negasjons normalform) Skriv om følgende formler til negasjons normalform.

a. $\neg(P \to Q)$

b. $\neg\forall x Px$

c. $\neg\exists x(Px \to Qx)$

d. $\neg\exists x(Px \to (Qx \wedge \neg Rx))$

Gjør bevis for at

e. ekvivalens 5 holder.

f. ekvivalens 6 holder.

Preneks normalform

I formelen $\forall x Px \vee \forall x Qx$ er variabelen x bundet av to forskjellige kvantorer. Hvis vi døper om x til y i høyre delformel får vi formelen $\forall x Px \vee \forall y Qy$, der hver kvantor binder en unik variabel. Generelt kan vi alltid omforme en formel til en ekvivalent formel der alle kvantorene binder unike variable. La oss i det følgende anta at alle formler har denne egenskapen.

Definisjon 0.2 (Preneks normalform – PNF)**.** *En formel φ er på preneks normalform (PNF) hvis φ er på formen*

$$\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$$

der hver $\mathcal{Q}_i$ er en kvantor ($\forall$ eller $\exists$), hver x_i er en variabel og ψ er en åpen (kvantorfri) formel.

Merk at listen med kvantorer kan være tom, dvs. at enhver kvantorfri formel er på preneks normalform. Enhver formel kan transformeres til en ekvivalent formel på preneks normalform på følgende måte.

1. Døp om bundne variable som beskrevet ovenfor slik at hver kvantor binder en unik variabel.
2. Transformer formelen til negasjons normalform.
3. Bruk ekvivalensene 7–10 nedenfor til å flytte kvantorene "ytterst".

(7) $\forall x \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$

(8) $\exists x \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$

(9) $\forall x \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$

(10) $\exists x \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \exists x(\varphi \vee \psi)$

Oppgave 2 (Preneks normalform) Skriv om følgende formler til preneks normalform.

a. $\neg \forall x Px$

b. $\forall x Px \vee \forall x Qx$

c. $\neg \forall x(Px \rightarrow \exists x Qx)$

d. $(\forall x Px \vee \forall x Qx) \rightarrow \forall x(Px \vee Qx)$

Bevis at

e. ekvivalens 7 holder.

f. ekvivalens 8 holder.

Hvis vi ikke sørger for at hver kvantor binder en unik variabel, så holder ikke ekvivalensene 7–10 over.

g. Er $\forall x Px \vee \forall x Qx$ ekvivalent med $\forall x(Px \vee Qx)$? Lag et bevis eller finn et moteksempel.

Disjunktiv og konjunktiv normalform - for utsagnslogikk

Vi har til nå i kurset sett på disjunksjoner $(\varphi \vee \psi)$ og konjunksjoner $(\varphi \wedge \psi)$ med *to* argumenter. Konnektivene $\vee$ og $\wedge$ kan imidlertid generaliseres til å ta mer enn to argumenter.

Definisjon 0.3.

- *En generalisert disjunksjon er en formel på formen* $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n)$ *der hver* φ_i $(1 \leq i \leq n)$ *er en formel.*
- *En generalisert konjunksjon er en formel på formen* $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ *der hver* φ_i $(1 \leq i \leq n)$ *er en formel.*

Ved å bruke de generaliserte konnektivene kan vi f.eks. skrive $P \vee Q \vee R$ der vi tidligere måtte skrive $P \vee (Q \vee R)$ (eller $(P \vee Q) \vee R$). Legg merke til at P både er en generalisert disjunksjon og konjunksjon. Fra nå av bruker vi kun de generaliserte konnektivene. For å definere disjunktiv og konjunktiv normalform trenger vi i tillegg begrepet *literal*.

Definisjon 0.4.

- *En literal er en atomær formel eller negasjonen av en atomær formel.*
- *En formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner av en eller flere literaler.*

- *En formel er på konjunktiv normalform (KNF) hvis den er en konjunksjon av en eller flere disjunksjoner av en eller flere literaler.*

Det følger fra definisjonene at envher formel på DNF eller KNF også er på NNF. Noen eksempler:

- $\neg P$ er både på DNF og KNF.
- $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge S)$ er på DNF.
- $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg R \vee S)$ er på KNF.
- $P \vee Q$ er både på DNF og KNF.
- $P \wedge Q$ er både på DNF og KNF.
- $\neg(P \vee Q)$ er hverken på KNF, DNF eller NNF.
- $P \vee (Q \wedge (R \vee S))$ er hverken på KNF eller DNF, men er på NNF.

De *distributive lover* er følgende ekvivalenser (for alle utsagnslogiske formler A, B eller C):

(11) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(12) $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

(13) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(14) $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Lest fra venstre mot høyre kan disse også leses som omskrivingsregler. Eksempel på overføring til DNF:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge (C \vee D) &\rightsquigarrow ((A \vee B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge D) \\ &\rightsquigarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge D) \\ &\rightsquigarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D) \end{aligned}$$

Oppgave 3 Overfør hver av følgende formler til ekvivalente formler på DNF og KNF.

1. $P \rightarrow Q$
2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R)$
3. $(P \vee Q) \wedge (R \wedge S)$
4. $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$

Forklar hva som er sammenhengen mellom DNF, KNF og sannhetsverditabeller.

Andre oppgaver

Oppgave 4 La $\mathcal{M}$ være en modell. Omformuler definisjonen av semantikken for førsteordens logikk ved å definere (rekursivt) en funksjon $v_{\mathcal{M}} : \mathcal{F} \to \textbf{Bool}$ slik at $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi$. Hint 1: $v_{\mathcal{M}}$ er helt lik en boolsk valuasjon, bortsett fra på formler som har en kvantor ytterst. Hint 2: En boolsk valuasjon v *kunne ha vært definert* slik: $v(A \land B) = \min\{v(A), v(B)\}$ og $v(A \lor B) = \max\{v(A), v(B)\}$. Hint 3: Kvantorene kan ses på som en form for uendelige konnektiver.

Oppgave 5 (Konger, damer og tigre III) Kongen var misfornøyd, for alle fangene klarte oppgavene. Derfor bestemte han seg for å gjøre oppgavene litt vanskeligere. Kongen forklarer: "I det venstre rommet (rom 1), så er det slik at hvis det er en dame der, så er det som står på utsiden sant, men hvis det er en tiger der, så er det som står på utsiden usant. I det andre rommet (rom 2), så er det omvendt: Hvis det er en dame der, så er det som står på utsiden usant, og hvis det er en tiger der, så er det som står på utsiden sant. Det er mulig at begge rommene inneholder en tigre eller at begge rommene inneholder damer, eller at det er en tiger og en dame."

(1)	(2)
BEGGE ROMMENE INNEHOLDER DAMER	BEGGE ROMMENE INNEHOLDER DAMER

Hvilket rom velger du?

(Oppgaven er hentet fra *The lady or the tiger?*, Raymond Smullyan, 1982)