

INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 8

Oppgave 1 Strategier kan ha mye å si for størrelsen på bevis. Lag to strategier for utsagnslogisk LK som viser at det er slik. Finn eksempler på bevisbare sekvenser hvor den ene strategien gir små bevis og den andre strategien gir store bevis. Hint: er det lurt å forgrene så for som mulig i et bevissøk, eller er det ikke det? Se på sekvensen:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

Oppgave 2 Bevis eller finn motmodeller for følgende sekvenser

1. $\forall x(Px \rightarrow Pfx) \vdash Pa \rightarrow Pffa$
2. $\forall x(Px \rightarrow \exists xPx)$
3. $\exists x(Px \rightarrow \exists xPx)$
4. $\forall x(Px \rightarrow \forall xPx)$
5. $\exists x(Px \rightarrow \forall xPx)$
6. $P \vee \forall x\neg Qx \vdash \forall x(P \vee \neg Qx)$
7. $\forall x\forall y(Pxy \rightarrow Pyx), \forall x\exists yPxy \vdash \forall x\exists y(Pxy \wedge Pyx)$
8. $\exists x(Px \vee Qx) \vdash \exists xPx \vee \exists xQx$
9. $\exists x(Px \wedge Qx) \vdash \exists xPx \wedge \exists xQx$
10. $\vdash \forall x\exists y\forall z\exists w(Rxy \rightarrow R wz)$
11. $\forall x((Px \wedge Qx) \rightarrow Rx) \vdash \forall x(Px \rightarrow Rx) \vee \forall x(Qx \rightarrow Rx)$

Oppgave 3 Vis at LK er **sunnt** hvis og bare hvis enhver oppfyllbar mengde Γ er konsistent.

Oppgave 4 La Γ være en mengde formler. La $\varphi \in \Gamma$. Vi sier at φ er **uavhengig** av de andre formlene i Γ , hvis det er slik at $\Gamma \setminus \{\varphi\} \not\vdash \varphi$.

- (1) $\forall x\forall y\forall z(Rxy \wedge Rxz \rightarrow Rxz)$
- (2) $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$
- (3) $\forall xRxx$

(1), (2) og (3) aksiomatiserer en ekvivalensrelasjon. Vis at alle tre er uavgengig av hverandre. (Hint: bruk sannhetsteoremet.)

Oppgave 5 Anta at vi har en lukket formel $\forall x\varphi$ og at a er en parameter som ikke forekommer i $\forall x\varphi$.

- Vis at $\forall x\varphi$ er falsifiserbar hvis og bare hvis $\varphi[a/x]$ er falsifiserbar.
- Vis at $\forall x\varphi$ er gyldig hvis og bare hvis $\varphi[a/x]$ er gyldig.

Oppgave 6 Bruk en rettferdig strategi for LK til å undersøke gyldigheten av følgende sekvenser:

- $\forall x\exists yLxy \vdash \exists y\forall xLxy$
- $\exists x\forall yLxy \vdash \forall y\exists xLxy$

Vis hvordan søkestrategien gir et bevis eller hvordan søkestrategien genererer et objekt utfra hvilket man kan konstruere en motmodell.

Oppgave 7 La $\forall x\varphi$ være en formel og la \mathcal{M} være en Herbrandmodell med domene lik Herbranduniverset til formelen. Vis at

- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ for alle termer $t \in |\mathcal{M}|$, og
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ for minst en term $t \in |\mathcal{M}|$.