

Fra Oblig 1

Vis at en sekventkalkyleregul er falsifikasjonsbevarende hvis og bare hvis den er gyldighetsbevarende.

Intuisjonistisk logikk, LJ og Kripke-modeller

“Er det forskjell på en modell med ett punkt x der x tvinger P , og en modell med to punkter x og y , $x \leq y$, der y tvinger P og x er tom?”

“Hva er forskjellen på en modell med tre punkter x, y, z der $x \leq y$ og $x \leq z$, y tvinger P og z tvinger Q og x er tom, og en modell med to punkter x og y , $x \leq y$, der x er tom og y tvinger P og y tvinger Q ?”

“I avsnittet Sunnhet av LJ ser det for oss ut som om det har skjedd en feil. Alle overskriftene er ‘Regel x bevarer gyldighet’, mens det er falsifiserbarhet som blir vist.”

Reglene bevarer gyldighet nedover og falsifiserbarhet oppover. Kunne ha vært formulert bedre på foilene.

Intuisjonistisk logikk, LJ og Kripke-modeller

Fra forelesningene:

- Kripke-modeller som kun består av ett punkt kollapser til valuasjoner, dvs. modeller for klassisk logikk.
- Merk at dette gir et *semantisk* bevis for at alt som er gyldig intuisjonistisk, også er klassisk gyldig. For anta at en formel A ikke er klassisk gyldig. Da finnes en valuasjon v som gjør den usann. Men siden alle valuasjoner også er intuisjonistiske modeller, er A heller ikke intuisjonistisk gyldig.

“Kan det tolkes til at en Kripke-modell må ha mer enn et punkt hvis rotsekventen er klassisk gyldig?”

Bevisføring

“Når vi skal gjennomføre et bevis, har det noe å si (=blir det sett på som bedre/dårligere) om vi velger direkte bevis, motsigelsesbevis eller bevis for den kontrapositive påstanden?”

Fra Oppgave 6.1

“Skriv ut hele den rekursive definisjonen av tolkningen av en lukket term.”

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Vi antar at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell. Da tolker vi en lukket term t på følgende måte:

- Hvis t er en konstant a , så lar vi $t^{\mathcal{M}} = a^{\mathcal{M}}$
(Dette dekker både konstanter fra \mathcal{L} og konstanter fra $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.)
- Hvis $t = f(t_1, \dots, t_n)$, for et funksjonssymbol f , så lar vi $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}})$.

Formalisering

“Når man skal skrive om norske setninger til første-ordens formler i et gitt språk, er det da flere måter å skrive samme setning på?”

Fra Oppgave 6.3

- Vis at for enhver formel φ og term t , hvis y ikke er i $FV(\varphi)$, så $\varphi[t/y] = \varphi$. (Oppgave 5.2.5 fra Gallier.)

Bevis ved strukturell induksjon på førsteordens formler.

- Basissteg.
 - Anta at φ er en atomær formel på formen $P(s_1, \dots, s_n)$. $P(s_1, \dots, s_n)[t/y] = P(s_1[t/y], \dots, s_n[t/y]) = P(s_1, \dots, s_n)$, siden ingen av termene s_i inneholder y .
 - Vi bruker her at hvis en term s er slik at y ikke er i $FV(s)$, så vil $s[t/y] = s$. Dette kan lett vises ved induksjon.
- Induksjonssteg. Da er φ en ikke-atomær formel.
 - Anta at φ er på formen $\exists x\psi$.
 - * Hvis $x = y$, så vil $\exists x\psi[t/y] = \exists x\psi$.
 - * Hvis $x \neq y$, så vil $\exists x\psi[t/y] = \exists x(\psi[t/y])$. Ved IH vil $\psi[t/y] = \psi$. Da vil $\exists x\psi[t/y] = \exists x\psi$.

Andre spørsmål

“Kompletthet av LK er litt vrient, gjerne litt om det også.”

Oppgave 2.8

La A og B være utsagnslogiske formler. Se på følgende påstander:

- (1) A er sann hvis og bare hvis B er sann.
- (2) A er en tautologi hvis og bare hvis B er en tautologi.

Lag et bevis eller finn et moteksempel til hver av påstandene nedenfor.

- a. Påstand (1) følger fra påstand (2).
- b. Påstand (2) følger fra påstand (1).

Kompletthet av LK

- Hva er definisjonen av at en sekventkalkyle er *komplett*?
- Hvordan viser vi kompletthet av utsagnslogisk LK?
- Hvordan viser vi kompletthet av grunn førsteordens LK?
- Hvordan viser vi kompletthet av fri-variabel LK?

Trykkfeil i oppgave 14.5.4

Riktig sekvent:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash (Pa \rightarrow Qa) \wedge (Pb \rightarrow Qb)$$

Er den bevisbar...?

Fri-variabel LK- Bevis/motmodeller

Hvordan føre et fri-variabel LK-bevis?

- Hva er definisjonen av et fri-variabel LK-bevis for $\Gamma \vdash \Delta$?

Hvordan finne motmodeller?

- Hva er definisjonen av en motmodell til en sekvent med frie variable?

$$\begin{array}{c} a/u \\ \frac{Pu \vdash Pa}{Pu \vdash \forall xPx} \\ \frac{\vdash Pu \rightarrow \forall xPx}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)} \end{array}$$

$$\frac{\frac{Pu \vdash Pa}{Pu \vdash \forall xPx} \quad \frac{Qu \vdash Qb}{Qu \vdash \forall xQx}}{\frac{\vdash Pu \rightarrow \forall xPx \quad \vdash Qu \rightarrow \forall xQx}{\vdash (Pu \rightarrow \forall xPx) \wedge (Qu \rightarrow \forall xQx)}} \\ \frac{\vdash (Pu \rightarrow \forall xPx) \wedge (Qu \rightarrow \forall xQx)}{\vdash \exists x((Px \rightarrow \forall xPx) \wedge (Qx \rightarrow \forall xQx))}$$