

INF3170 – Logikk

Forelesning 4: Repetisjon og førsteordens logikk

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

12. februar 2007



Dagens plan

- 1 Repetisjon
- 2 Innledning til førsteordens logikk
- 3 Førsteordens logikk - syntaks

Repetisjon

Motivasjon

“Hvis Ole følger inf3170, så liker Ole logikk.”
“Ole følger inf3170, og Ole følger ikke inf3170.”
“Ole følger inf3170, eller Ole følger ikke inf3170.”

- Er utsagnene *sanne*?
- Avhengig av hvordan vi *tolker* utsagnene!
- Finnes det utsagn som alltid er sanne?
- Vi ønsker å en måte å finne slike utsagn på!
- Vi ønsker *matematisk presisjon*, så vi må *formalisere* utsagn og tolkninger.

Formalisering

- Utsagn formaliseres som utsagnslogiske formler.
- Tolkning formaliseres med sannhetsverdier og valusjoner.

Repetisjon

Syntaks: Utsagnslogiske formler

Alfabet

- Utsagnsvariable: P_1, P_2, P_3, \dots
 - Står for *atomære* utsagn, f.eks. *“Ole liker logikk”*.
 - Skrives ofte P, Q, R, \dots pga. lesbarhet.
- Logiske konnektiver: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
 - Brukes til å bygge opp sammensatte utsagn.
- Hjelpesymboler: $(,)$
 - Brukes for å gi entydig parsing av formler.
- Vi kan lage mange uttrykk med disse symbolene:
 - $((\neg \rightarrow \wedge(($
 - $\rightarrow P \wedge ((PP$
 - $\neg(P \wedge (\neg Q \rightarrow P))$
- Vi er kun interessert i uttrykk som samsvarer med de utsagn vi vil analysere!

Induktiv definisjon – stegvis bygge opp en uendelig mengde

Mengden av utsagnslogiske formler – \mathcal{F}_u

Basismengde: Enhver utsagnsvariabel er en utsagnslogisk formel.

Induksjonssteg: Hvis A og B er utsagnslogiske formler, så er

- $\neg A$ en utsagnslogisk formel
- $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ utsagnslogiske formler.

Basismengde: P, Q, R, \dots

Steg 1: $\neg P, \neg Q, \neg R, \dots$

$(P \wedge P), (P \wedge Q), (P \wedge R), \dots$

$(P \vee P), (P \vee Q), (P \vee R), \dots$

$(P \rightarrow P), (P \rightarrow Q), (P \rightarrow R), \dots$

Steg 2: $\neg\neg P, \neg\neg Q, \neg\neg R$

$(P \wedge \neg P), (\neg P \wedge P), (\neg P \wedge \neg P), (P \wedge \neg Q), \dots$

⋮

Semantikk: Tolke utsagn – valuasjoner

- Vi skal gi sannhetsverdier, **1** eller **0**, til formler: $(P \rightarrow Q) \vee \neg P$
- **Valuasjoner** er funksjoner fra \mathcal{F}_u til $Bool = \{1, 0\}$ som overholder bestemte regler m.h.p. konnektivene $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.
- Hvorfor overholde konnektivregler?
- La $v(P) = f(P) = 1$ og $v(Q) = f(Q) = 0$, men la $v(P \rightarrow Q) = 0$ og $f(P \rightarrow Q) = 1$.
 - Begge er funksjoner fra \mathcal{F}_u til **Bool**, men kun v er en valuasjon!
 - f overholder ikke regelen for \rightarrow : Hvis P tolkes som **1** og Q tolkes som **0**, så skal $P \rightarrow Q$ tolkes som **0**.

Konnektivreglene

Konnektivreglene uttrykkes v.h.a. de boolske operatorene $\hat{\neg}, \hat{\wedge}, \hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$.

Oppfylle og falsifisere

- En valuasjon **oppfyller** en utsagnslogisk formel A , $v \models A$, hvis $v(A) = 1$.
- En valuasjon **falsifiserer** en utsagnslogisk formel A , $v \not\models A$, hvis $v(A) = 0$.
- Formelen A er en **tautologi** hvis *alle* valuasjoner oppfyller den.
- Det er det samme som at *ingen* valuasjoner falsifiserer den.

Sekventer og sekventkalkyle

- En **sekvent** er på formen $\Gamma \vdash \Delta$ der Γ og Δ er multimengder av formler.
- En sekvent er **gyldig** hvis enhver valuasjon som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller en formel i Δ .
- En valuasjon v er en **motmodell** til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- En sekvent er **falsifiserbar** hvis den har en motmodell.
- En sekventkalkyle er **sunn** hvis enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- En sekventkalkyle er **usunn** hvis det finnes en bevisbar sekvent som er falsifiserbar.
- En sekventkalkyle er **komplett** hvis enhver gyldig sekvent er bevisbar.
- En sekventkalkyle er **ukomplett** hvis det finnes en gyldig sekvent som *ikke* er bevisbar.

1 Repetisjon

2 Innledning til førsteordens logikk

- Introduksjon
- Overblikk
- Syntaks
- Eksempler på førsteordens språk
- Syntaks
- Eksempler på førsteordens formler

3 Førsteordens logikk - syntaks

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene \neg , \wedge , \vee og \rightarrow , og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
 - \exists (eksistenskvantoren) og
 - \forall (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
- Førsteordens logikk er ikke avgjørbart.

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."
- "Hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c , så er a mindre enn c ."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."
- "Det fins to sheriffer i byen."

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfylbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Sunnhet: alle bevisbare sekvenser er gyldige.

Kompletthet: alle gyldige sekvenser er bevisbare.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle *førsteordens språk* består av følgende *logiske symboler*:

- De logiske konnektivene \wedge , \vee , \rightarrow og \neg .
- Hjelpesymbolene '(' og ')' og ';' .
- *Kvantorene* \exists (det fins) og \forall (for alle).
- En tellbart uendelig mengde \mathcal{V} av *variable* x_1, x_2, x_3, \dots (vi skriver x, y, z, \dots , for variable).

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et *førsteordens språk* av følgende mengder av *ikke-logiske symboler*:

- En tellbar mengde av *konstantsymboler* c_1, c_2, c_3, \dots
- En tellbar mengde av *funksjonssymboler* f_1, f_2, f_3, \dots
- En tellbar mengde av *relasjonssymboler* R_1, R_2, R_3, \dots

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt *ariteten* til symbolet.

Syntaks

Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

Definisjon (Signatur)

- De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en *signatur*.
- En signatur angis ved et tuppel $\langle c_1, c_2, c_3, \dots; f_1, f_2, f_3, \dots; R_1, R_2, R_3, \dots \rangle$, hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.

Syntaks

Definisjon (Termer)

Mengden \mathcal{T} av *første-ordens termer* er induktivt definert som den minste mengden slik at:

- Enhver variabel og konstant er en term.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ en term.

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a, x, y, \dots, f(a), f(x), f(y), \dots$
- $g(a, a), g(a, x), g(a, y), g(x, x), g(x, y), g(y, y), \dots$
- $f(f(a)), f(f(x)), f(f(y)), \dots$

Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive $fa, fx, fy, gaa, gax, \dots$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \dots$
- Ikke termer: $= (x, x), ++, +0, \dots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi **prefiks notasjon**.
- Vi bruker også **infiks notasjon** og skriver:
 $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \dots$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og \times (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: \emptyset
- Funksjonssymboler: \cap og \cup (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og \in (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \text{Ola, Kari; mor, far; Mor, Far, Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x , Ola og Kari er termer.
- $\text{mor}(\text{Ola})$, $\text{mor}(\text{Kari})$, $\text{far}(\text{Ola})$ og $\text{far}(\text{Kari})$ er termer.
- $\text{mor}(x)$ og $\text{far}(x)$ er termer.
- $\text{mor}(\text{mor}(x))$ og $\text{mor}(\text{far}(\text{Kari}))$ er termer.

Syntaks

Definisjon (Atomær formel - førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $R(t_1, \dots, t_n)$ en *atomær formel*.

Merk

- Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.
- Så lenge det er entydig og ariteten er kjent skriver vi Rx , Rfa , $Rafa$, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden \mathcal{F} av *førsteordens formler* er den minste mengden slik at:

- 1 Alle atomære formler er formler.
- 2 Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
- 3 Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være *bundet* i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor *skopet* til den gjeldende kvantoren.

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \text{Idol, Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\text{Idol}(x)$, $\text{Idol}(a)$, $\text{Liker}(a, a)$, $\text{Liker}(a, b)$
- $\exists x \text{Idol}(x)$ - "det fins et Idol"
- $\forall x \exists y \text{Liker}(x, y)$ - "alle liker noen"
- $\forall x \text{Liker}(x, a)$ - "alle liker a "
- $\neg \exists x \text{Liker}(x, b)$ - "ingen liker b "
- $\forall x (\text{Idol}(x) \rightarrow \text{Liker}(x, x))$ - "alle idoler liker seg selv"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - “en pluss en er to”
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - “addisjon er kommutativt”
- $\forall x \exists y (y = sx)$ - “alle tall har en etterfølger”
- $\neg \exists x (0 = sx)$ - “0 er ikke etterfølgeren til noe”
- $\exists x \exists y \neg (x = y)$ - “det fins to forskjellige objekter”

1 Repetisjon

2 Innledning til førsteordens logikk

3 Førsteordens logikk - syntaks

- Repetisjon og presiseringer
- Frie variable i termer
- Rekursive definisjoner

Repetisjon og presiseringer

Et førsteordens språk \mathcal{L} består av:

1 Logiske symboler

- konnektiver: $\wedge, \vee, \rightarrow$ og \neg
- hjelpesymboler: ‘(’ og ‘)’ og ‘,’
- kvantorer: \exists og \forall
- variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

2 Ikke-logiske symboler:

- en tellbar mengde konstantsymboler
- en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
- en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en **signatur**

$$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \dots}_{\text{konstantsymboler}} ; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \dots}_{\text{funksjonssymboler}} ; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \dots}_{\text{relasjonssymboler}} \rangle.$$

Repetisjon og presiseringer

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	\langle	a	$;$	f, g	$;$	P, R	\rangle
aritmetikk 1:	\langle	0	$;$	$s, +$	$;$	$=$	\rangle
aritmetikk 2:	\langle	$0, 1$	$;$	$+, \times$	$;$	$=, <$	\rangle
mengdelære:	\langle	\emptyset	$;$	\cap, \cup	$;$	$=, \in$	\rangle
familierelasjoner:	\langle	Ola, Kari	$;$	mor, far	$;$	Mor, Far, Slektning	\rangle
beundring:	\langle	a, b	$;$		$;$	Idol, Liker	\rangle

Repetisjon og presiseringer

Hvis et førsteordens språk \mathcal{L} er gitt, så får vi (definert induktivt):

- ① Mengden \mathcal{T} av termer i \mathcal{L} :
 - Enhver variabel og konstant er en term.
 - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ en term.
- ② Mengden \mathcal{F} av formler i \mathcal{L} :
 - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $R(t_1, \dots, t_n)$ en (atomær) formel.
 - Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
 - Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Repetisjon og presiseringer

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$ kan vi uttrykke:

- | | | |
|-----|--------------------------------------|---|
| 1: | Alice liker Bob: | $\text{Liker}(a, b)$ |
| 2: | Alice liker alle: | $\forall x \text{Liker}(a, x)$ |
| 3: | Alice liker alle som Bob liker: | $\forall x (\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$ |
| 4: | Noen liker seg selv: | $\exists x \text{Liker}(x, x)$ |
| 5: | Bob liker alle som liker seg selv: | $\forall x (\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$ |
| 6: | Ingen liker både Alice og Bob: | $\neg \exists x (\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
$\forall x (\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg \text{Liker}(x, b))$ |
| 7: | Noen liker ikke seg selv: | $\exists x \neg \text{Liker}(x, x)$ |
| 8: | Bob liker noen som liker Alice: | $\exists x (\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$ |
| 9: | En som blir likt av alle er et idol: | $\forall x (\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$ |
| 10: | Et idol blir likt av alle: | $\forall x (\text{Idol}(x) \rightarrow \forall y \text{Liker}(y, x))$ |

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$FV(t)$ betegner mengden av *frie variable* i termen t .

Definisjon (Lukket term)

En term t er *lukket* hvis $FV(t) = \emptyset$, dvs. t inneholder ingen frie variable.

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ har vi:

- Termen $f(x, a)$ har en fri variabel x .
- Termen $f(a, b)$ har ingen frie variable og er en lukket term.

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden *rekursivt* ved å

- ① gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
- ② gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t , la mengden $FV(t)$ av *frie variable* i t være definert rekursivt ved:

- $FV(x_i) = \{x_i\}$, for en variabel x_i , og
- $FV(c_i) = \emptyset$, for en konstant c_i , og
- $FV(f(t_1, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n)$, for et funksjonssymbol f med aritet n .