

INF3170 – Logikk

Forelesning 15: Oppgaveløsning

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

21. mai 2007



Dagens plan

- 1 Generelle eksamenstips
- 2 Eksamen 2006

Disponér tiden!

- Sett opp et grovt tidsbudsjett.
- En tre timers eksamen har $3 * 60 = 180$ minutter.
- Oppgavene er vektet med %.
- Beregn 15-30 minutter til å se gjennom og fullføre ubesvarte oppgaver på slutten av eksamenstiden.
- Fordel de resterende minuttene prosentvis på hver oppgave.
- Ikke bli sittende med en oppgave lengre enn oppgavens prosentsats tilsier. Hopp heller videre til neste oppgave!
- Gjør gjerne oppgaver du er sikker på tidlig, og bruk heller tid på slutten til usikre oppgaver og "nøtter".

Forstå teksten og begrepen!

- Sørg for at du har forstått oppgaven!!
- Er du usikker, spør faglærer!
- Skriv gjerne ned definisjonene av sentrale begreper i oppgaveteksten.
- Finn ut hva oppgaven spør etter!
- Hva slags svar kreves av deg? Sørg for å besvare oppgaven!
- Hvordan må du gå fram for å vise det du blir bedt om i de tilfeller der oppgaven spør om bevis for påstander? (Repetér gjerne foilene om bevisteknikker!)
- På en tre timers eksamen krever vi ikke lange avhandlinger som oppgavesvar. Hvis du tar deg selv i å skrive sidevis på én deloppgave er det stor sjanse for at du kanskje har misforstått oppgaven...

Eksamen 2006

- Seks oppgaver
- Utsagnslogikk, førsteordens logikk, intuitjonistisk logikk, sekventkalkyler, induksjon, fri-variabel LK
- Nesten hele pensum dekket
- Disponere tiden: 3 * 60 minutter = 180 minutter totalt
- Sett av en halv time til å se over til slutt, dvs. 150 minutter til å løse oppgavene

Oppgave 1: Utsagnslogikk (10 % = 15 min)

- 1 $A \vee (B \wedge C) \vdash B \wedge (A \vee C)$
- 2 $B \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$

- a) For hver av sekventene over: finn et LK-bevis for sekventen eller en valuasjon som falsifiserer sekventen.
- b) La nå A , B og C være plassholdere for vilkårlige formler. Er følgende regel en *sun*n LK-regel? Begrunn svaret.

$$\frac{\Gamma, A \vee (B \wedge C) \vdash \Delta}{\Gamma, B \wedge (A \vee C) \vdash \Delta}$$

Identifiser sentrale begreper

- a) For hver av sekventene over: finn et **LK-bevis** for sekventen eller en valuasjon som **falsifiserer** sekventen.

Sentrale begreper:

- **LK-bevis**: LK-utledning der *alle* løvsekventene er aksiomer, dvs. har samme atomære formel i både antecedenten og succedenten
- **falsifiserende valuasjon**: en valuasjon som oppfyller *alle* formlene i antecedenten og falsifiserer *alle* formlene i succedenten

a) Finn LK-bevis eller falsifiserende valuasjon

- 1 $A \vee (B \wedge C) \vdash B \wedge (A \vee C)$

Hvordan griper vi oppgaven an?

- Hvis sekventen er **gyldig**, vet vi at den er LK-bevisbar. (Hvorfor?)
- Men hvis den *ikke* er gyldig, skal vi gi en motmodell.
- Da er det dumt å bruke tid på å skrive ut en LK-utledning...
- La oss forsøke å finne ut om sekventen er gyldig først!

Er sekventen gyldig?

$$① A \vee (B \wedge C) \vdash B \wedge (A \vee C)$$

- En sekvent er **gyldig** hvis enhver valuasjon som oppfyller *alle* fml. i antecedenten også oppfyller én fml i succedenten.
- Anta at $v \models A \vee (B \wedge C)$. Da må
 - $v \models A$, eller
 - $v \models B \wedge C$, dvs. $v \models B$ og $v \models C$.
- Følger det fra antakelsen at $v \models B \wedge (A \vee C)$, dvs. at $v \models B$ og $v \models A \vee C$?
 - Hvis $v \models A$, så vet vi ikke om v oppfyller B .
 - Kan $v \models A$, $v \not\models B$, $v \not\models C$ være en motmodell...? **Ja!**

Svar på 1 a) 1:

Enhver modell v slik at $v \models A$ og $v \not\models B$ er motmodell til sekventen.

Er sekventen gyldig?

$$② B \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$$

- Anta at $v \models B \wedge (A \vee C)$, dvs. at $v \models B$, og
 - (a) $v \models A$, eller
 - (b) $v \models C$.
- Følger det fra antakelsen av v oppfyller $A \vee (B \wedge C)$? Vi får to tilfeller:
 - (a) Hvis $v \models A$, så er venstre disjunkt oppfylt.
 - (b) Hvis $v \models C$, så holder $v \models B \wedge C$.
- Sekventen er gyldig!

Vi gir et LK-bevis som svar

$$② B \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$$

Svar på 1 a) 2:

$$\frac{\frac{\frac{\times}{B, A \vdash A, B \wedge C} \quad \frac{\frac{\times}{B, C \vdash A, B} \quad \frac{\times}{B, C \vdash A, C}}{B, C \vdash A, B \wedge C}}{B, A \vee C \vdash A, B \wedge C}}{B, A \vee C \vdash A \vee (B \wedge C)}}{B \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)}$$

Oppgave 1 b) – sannhet av LK-regel

- b) La nå A , B og C være plassholdere for vilkårlige formler. Er følgende regel en **sun** LK-regel? Begrunn svaret.

$$\frac{\Gamma, A \vee (B \wedge C) \vdash \Delta}{\Gamma, B \wedge (A \vee C) \vdash \Delta}$$

Sentrale begreper:

- En LK-regel er **sun** hvis den er falsifiserbarhetsbevarende oppover (OBS! Står ikke på sannhetsfoilene!), dvs. at enhver valuasjon som falsifiserer konklusjonen også falsifiserer minst ett av premissene.

Hvordan gå frem for å løse oppgaven?

$$\frac{\Gamma, A \vee (B \wedge C) \vdash \Delta}{\Gamma, B \wedge (A \vee C) \vdash \Delta}$$

- To alternativer: enten så er regelen sunn, eller så er den ikke sunn.
- Hvis regelen er sunn, må vi gi en begrunnelse for sunnheten.
- Hvis regelen ikke er sunn, så må vi komme med et *moteksempel* til sunnhet, dvs. en valuasjon som falsifiserer konklusjonen, men som *ikke* falsifiserer premisset.
- Det finnes ingen generell regel for hva som lønner seg å gjøre, men ofte kan det være lurt å forsøke å vise sunnhet.
- Hvis beviset ikke går, får man ofte en idé til en moteksempel fra der beviset strandede.

Løsning på 1 b)

$$\frac{\Gamma, A \vee (B \wedge C) \vdash \Delta}{\Gamma, B \wedge (A \vee C) \vdash \Delta}$$

Observasjon:

- Fra 1 a) 2 har vi at sekventen $B \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$ er gyldig.
- Det betyr at enhver valuasjon som oppfyller antecedenten også må oppfylle $A \vee (B \wedge C)$, siden det er den eneste formelen i succedenten.

Svar 1 b):

LK-regelen er sunn. *Bevis:* anta at v falsifiserer konklusjonen, dvs. at v oppfyller alle i $\Gamma \cup \{B \wedge (A \vee C)\}$, og at v falsifiserer alle i Δ . Fra observasjonen over har vi at v må oppfylle $A \vee (B \wedge C)$, og dermed falsifiserer v premisset. Siden v var vilkårlig valgt, så bevarer regelen falsifiserbarhet oppover. Den er dermed sunn.

Oppgave 2: Sekventkalkyler (25 % = 37,5 min)

a) Avgjør om følgende sekvent er gyldig: $\vdash A \vee (A \rightarrow B)$

I utsagnslogisk LK har vi følgende regel: $\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$ RV

La LK⁻ være kalkylen vi får ved å erstatte denne regelen med følgende to regler:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \text{RV}_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \text{RV}_2$$

Du trenger i det følgende ikke argumentere for at LK er sunn og komplett.

- Er LK⁻ en sunn kalkyle? Forklar hvorfor eller hvorfor ikke.
- Er LK⁻ en komplett kalkyle? Forklar hvorfor eller hvorfor ikke.
- Avgjør om sekventen fra (a) er *intuisjonistisk* gyldig. Hvis sekventen er gyldig, gi et LJ-bevis. Hvis ikke, gi en Kripke-modell som er motmodell til sekventen.

a) Er sekventen $\vdash A \vee (A \rightarrow B)$ gyldig?

- Vi ser her at det tar kort tid å lage en LK-utledning for sekventen.
- Vi ser da at utledningen er et LK-bevis.
- Det er imidlertid ikke nok å sette opp LK-beviset!
- Vi må trekke inn sunnhet av LK for å gå fra LK-bevisbar til gyldig.

Svar på 2 a):

Sekventen er gyldig. Her er et LK-bevis for den:

$$\frac{\begin{array}{c} \times \\ A \vdash A, B \\ \hline \vdash A, A \rightarrow B \end{array}}{\vdash A \vee (A \rightarrow B)}$$

Siden LK er en sunn kalkyle, så er enhver bevisbar sekvent gyldig.

Merk: Vi kunne også argumentert semantisk. Gjør det som en oppgave!

b) Er LK^- sunn?

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV \rightsquigarrow \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV_2$$

- I sunnhetsbeviset for utsagnlogisk LK^- viste vi at alle reglene er sunne, dvs. at de bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Dette er tilstrekkelig for å vise sunnhet av kalkylen.
- I LK^- har vi erstattet RV med reglene RV_1 og RV_2 .
- Hvis RV_1 og RV_2 er sunne, så er alle reglene i LK^- sunne.

b) Er LK^- sunn?

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV \rightsquigarrow \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV_2$$

Svar 2 b):

LK^- er sunn. *Bevis:* Alle reglene i LK^- utenom RV_1 og RV_2 er også LK^- -regler. Vi har vist at disse reglene er sunne i sunnhetsbeviset for LK . Hvis vi viser at RV_1 og RV_2 er sunne, så kan vi gjøre sunnhetsargumentet for LK^- på samme måte som for LK .

Påstand: Reglene RV_1 og RV_2 er sunne. *Bevis:* Anta at v falsifiserer konklusjonen, dvs. at v oppfyller alle fml. i Γ , og at v falsifiserer alle fml. i $\Delta \cup \{A \vee B\}$. Siden $v \not\models A \vee B$, så har vi pr. def. av valuasjoner at $v \not\models A$ og $v \not\models B$. Fra dette følger at v falsifiserer premisene i både RV_1 og RV_2 . Siden v var vilkårlig valgt, så bevarer RV_1 og RV_2 falsifiserbarhet, dvs. at de er sunne.

c) Er LK^- komplett?

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV \rightsquigarrow \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV_2$$

- Her er det to muligheter: enten så er LK^- komplett, eller så er LK^- ikke komplett.
- Hvis LK^- er komplett, så må vi gi et argument for det.
- Hvis LK^- ikke er komplett, så må vi komme med et *moteksempel*, dvs. en gyldig sekvent som ikke er bevisbar i LK^- .
- Husk: LK^- er komplett hvis enhver gyldig sekvent er LK^- -bevisbar.
- Legg merke til premisene til RV_1 og RV_2 : én av disjunktene til $A \vee B$ forsvinner.
- Hva om vi trenger begge for å komme fram til et bevis?
- Husk: kontraksjon er *ikke* en del av utsagnslogisk LK , og derfor heller ikke en del av LK^- .

c) Er LK^- komplett?

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV \rightsquigarrow \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} RV_2$$

- I kompletthetsbeviset for LK viste vi at vi kunne konstruere en motmodell til enhver ikke-bevisbar sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:
- Fra en åpen gren G i en *maksimal* utledning for $\Gamma \vdash \Delta$ konstruerte vi en valusjon v slik at $v \models A$ hvis og bare hvis A forekommer i G^+ .
- Vi viste så at for alle formler φ i G^+ så har vi $v \models \varphi$, og for alle formler φ i G^\perp så $v \not\models \varphi$.
- I tilfellet $A \vee B \in G^\perp$:
 - Siden $A \vee B$ er ekspandert på G , så har vi $A, B \in G^\perp$.
 - Siden A og B er av enklere struktur, så har vi ved IH $v \not\models A$ og $v \not\models B$.
 - Ved def. av valuasjoner har vi $v \not\models A \vee B$.
- I LK^- har vi at *enten* $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\perp$, avhengig av om vi brukte RV_1 eller RV_2 på $A \vee B$.
- Ikke nok til å slutte at $v \not\models A \vee B$!

c) Er LK^- komplett?

- Se på sekventen fra oppgave 2 a): $\vdash A \vee (A \rightarrow B)$
- Kan brukes som moteksempel til kompletthet av LK^- !

Svar på 2 c):

LK^- er *ikke* komplett. *Moteksempel:* Vi viste at sekventen $\vdash A \vee (A \rightarrow B)$ var gyldig i oppgave 2 a). Den er *ikke* bevisbar i LK^- :

$$\frac{\vdash A}{\vdash A \vee (A \rightarrow B)} RV_1 \quad \frac{A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B} R_{\rightarrow} \quad \frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash A \vee (A \rightarrow B)} RV_2$$

Uansett om vi starter med RV_1 eller RV_2 , så kommer vi ikke fram til noe LK^- -bevis.

Merk: vi må vise at *ingen* LK^- -utledninger for sekventen er LK^- -bevis! Ikke nok å gi én av utledningene ovenfor!

d) Er $\vdash A \vee (A \rightarrow B)$ *intuisjonistisk* gyldig?

- Det kan ofte kreve litt kreativitet å finne intuisjonistiske motmodeller...
- LJ-bevis er derimot ikke veldig krevende å finne!
- La oss derfor være optimistiske og forsøke å bevise sekventen i LJ:

$$\frac{\vdash A}{\vdash A \vee (A \rightarrow B)} RV_1 \quad \frac{A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B} R_{\rightarrow} \quad \frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash A \vee (A \rightarrow B)} RV_2$$

- Vi kommer opp i en lignende situasjon som i forrige oppgave: sekventen er *ikke* bevisbar i LJ.
- Siden LJ er komplett for intuisjonistisk utsagnslogikk (bevis ikke pensum!) så er ikke sekventen intuisjonistisk gyldig.
- Vi må lage en Kripke-motmodell...

Noen begreper om intuisjonistiske Kripke-modeller

- En **Kripke-modell** er et trippel (S, \leq, \Vdash') der S er en mengde punkter, og \leq er en partiell ordning på S .
- \Vdash' er en binær relasjon fra S til mengden av atomære formler. \Vdash' er **monoton**, dvs. hvis $x \Vdash' P$ og $x \leq y$, så $y \Vdash' P$.
- \Vdash' utvides til \Vdash , som er def. for alle formler:
 - $x \Vdash P$ hvis $x \Vdash' P$ for atomær P
 - $x \Vdash A \wedge B$ hvis $x \Vdash A$ og $x \Vdash B$
 - $x \Vdash A \vee B$ hvis $x \Vdash A$ eller $x \Vdash B$
 - $x \Vdash A \rightarrow B$ hvis vi for enhver y slik at $x \leq y$ har at: hvis $y \Vdash A$, så $y \Vdash B$
 - $x \Vdash \neg A$ hvis for enhver y slik at $x \leq y$: $y \not\Vdash A$
- Et punkt x i en Kripke-modell er en **motmodell** til en sekvent $\Gamma \vdash C$ hvis $x \Vdash \Gamma$ and $x \not\Vdash C$. Hvis det finnes et slikt punkt i modellen sier vi at **Kripke-modellen** er en motmodell til sekventen.

Intuisjonistisk motmodell til $\vdash A \vee (A \rightarrow B)$

- Vi må lage en Kripke-modell som har et punkt x slik at $x \not\Vdash A \vee (A \rightarrow B)$, dvs. at $x \not\Vdash A$ og $x \not\Vdash A \rightarrow B$.
- For at $x \not\Vdash A \rightarrow B$, så må det finnes et punkt y slik at $x \leq y$ og
 - $y \Vdash A$
 - $y \not\Vdash B$

Svar på 2 d):

Sekventen er ikke intuisjonistisk gyldig. En motmodell er gitt til høyre. Kripke-modellen har to punkter; x og y slik at $x \leq y$. Siden $y \Vdash A$ og $y \not\Vdash B$, så har vi at $x \not\Vdash A \rightarrow B$. Videre har vi at $x \not\Vdash A$. Dermed er x en motmodell til sekventen.



Generelle tips til intuisjonistiske motmodeller

- For at en Kripke-modell skal være en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash C$, så må det finnes et punkt x i Kripke-modellen slik at $x \Vdash \Gamma$ og $x \not\Vdash C$.
- Sett opp en oversikt over hvilke formler x skal tvinge og hvilke formler x ikke skal tvinge.
- Bruk definisjonen av \Vdash til å finne ut hvilke egenskaper punktet x må ha, og hvilke evt. andre punkter modellen må inneholde. Finn også ut hvordan punktene må relateres med \leq .
- Gi gjerne svaret ditt som en graf der et punkt y ligger over et punkt x hvis og bare hvis $x \leq y$.
- Husk å oppgi hvilket punkt i modellen din som er motmodell til sekventen og hvorfor!
- Bruk gjerne svaret på oppgave 2 d) på forrige foil som mal.

Oppgave 3: Induksjon (15 % = 22,5 min)

Hvis F er en utsagnslogisk formel og P er en utsagnsvariabel, la $F[A/P]$ betegne formelen F hvor alle forekomster av P er erstattet med A . La A og B være utsagnslogiske formler. Vis ved strukturell induksjon at hvis A og B er **ekvivalente**, så er $F[A/P]$ og $F[B/P]$ ekvivalente.

- Operatoren $'/'$ betegner det å erstatte alle forekomster av en gitt utsagnsvariabel med en gitt utsagnslogisk formel.
- Hvis $F = P \wedge (Q \rightarrow P)$ så er
 - $F[R \rightarrow Q/P] = (R \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow (R \rightarrow Q))$,
 - $F[P/Q] = P \wedge (P \rightarrow P)$, og
 - $F[P/R] = P \wedge (Q \rightarrow P)$.
- Sett gjerne opp noen eksempler på et kladdemark hvis du er usikker på hva som menes!
- To utsagnslogiske formler A og B er **ekvivalente** hvis for enhver valuasjon v så holder $v \models A$ hvis og bare hvis $v \models B$.

Oppgave 3: Induksjon (15 % = 22,5 min)

Hvis A og B er ekvivalente, så er $F[A/P]$ og $F[B/P]$ ekvivalente.

Svar på 3:

Anta at A og B er ekvivalente. Vi viser at $F[A/P]$ og $F[B/P]$ er ekvivalente ved strukturell induksjon på F .

Basistilfelle: F er en atomær formel Q . Vi får to tilfeller:

- Hvis $Q = P$, så har vi $Q[A/P] = P[A/P] = A$ som pr. antakelse er ekvivalent med $B = P[B/P] = Q[B/P]$.
- Hvis $Q \neq P$, så har vi $Q[A/P] = Q = Q[B/P]$.

Oppgave 3: Induksjon (15 % = 22,5 min)

Hvis A og B er ekvivalente, så er $F[A/P]$ og $F[B/P]$ ekvivalente.

Svar på 3 (forts.):

Induksjonssteg: Anta at $F = \neg C$. Siden C er av enklere struktur enn $\neg C$, kan vi anta at $C[A/P]$ og $C[B/P]$ er ekvivalente. La v være en vilkårlig valuasjon. Vi har at

- $(\neg C)[A/P] = \neg C[A/P]$, og at
- $(\neg C)[B/P] = \neg C[B/P]$,

siden erstatning av utsagnsvariable med formler ikke endrer \neg . Pr. antakelse har vi at $C[A/P]$ og $C[B/P]$ er ekvivalente. Men da må $\neg C[A/P]$ og $\neg C[B/P]$ være ekvivalente.

Oppgave 3: Induksjon (15 % = 22,5 min)

Hvis A og B er ekvivalente, så er $F[A/P]$ og $F[B/P]$ ekvivalente.

Svar på 3 (forts.):

Induksjonssteg: Anta at $F = C \circ D$, der $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Siden C og D er av enklere struktur enn $C \circ D$, kan vi anta at $C[A/P]$ og $C[B/P]$ er ekvivalente, og at $D[A/P]$ og $D[B/P]$ er ekvivalente. Vi har at

- $(C \circ D)[A/P] = C[A/P] \circ D[A/P]$, og at
- $(C \circ D)[B/P] = C[B/P] \circ D[B/P]$,

siden erstatning av utsagnsvariable med formler ikke endrer binære konnektiver. La v være en vilkårlig valuasjon. $v(C[A/P] \circ D[A/P])$ er avhengig av $v(C[A/P])$ og $v(D[A/P])$. Pr. antakelse har vi at $v(C[A/P]) = v(C[B/P])$ og at $v(D[A/P]) = v(D[B/P])$. Men da må $v(C[A/P] \circ D[A/P]) = v(C[B/P] \circ D[B/P])$. Siden v var vilkårlig, så er $(C \circ D)[A/P]$ og $(C \circ D)[B/P]$ ekvivalente.

Oppgave 4: Førsteordens logikk (20 % = 30 min)

Gi **korte** svare på følgende spørsmål.

- a) Hva er det minste antall elementer i domenet til en førsteordens modell?

Svar på 4 a):

Det minste antall elementer domenet kan ha er 1.

Husk: domenet til en førsteordens modell må være ikke-tomt!

Oppgave 4: Førsteordens logikk (20 % = 30 min)

- b) La f være et funksjonssymbol med aritet 1 og la a være et konstantsymbol. Hva er **Herbranduniverset** til følgende formel:
 $\forall x(Pfx \rightarrow \exists yQya)$?

- **Herbranduniverset** til en formel er mengden av lukkede termer vi kan generere fra konstant- og funksjonssymboler i formelen.
- Hvis formelen ikke inneholder noen konstantsymboler, så er *dummykonstanten* o med i Herbranduniverset til formelen.
- Her har vi konstantsymbolet a , så vi behøver ikke ha med dummykonstanten.

Svar på 4 b):

$a, fa, ffa, fffa, \dots$

Oppgave 4: Førsteordens logikk (20 % = 30 min)

- c) Skriv følgende formel om til preneks normalform: $\exists xPxa \rightarrow \forall yGya$.

- En formel φ er på **preneks normalform** (PNF) hvis φ er på formen

$$Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$$

der hver Q_i er en kvantor (\forall eller \exists), hver x_i er en variabel og ψ er en åpen (kvantorfri) formel.

- Se oppgavesett 6 for omskrivingsregler!

Svar på 4 c):

$$\begin{aligned} \exists xPxa \rightarrow \forall yGya &\rightsquigarrow \neg \exists xPxa \vee \forall yGya \\ &\rightsquigarrow \forall x \neg Pxa \vee \forall yGya \\ &\rightsquigarrow \forall x(\neg Pxa \vee \forall yGya) \\ &\rightsquigarrow \forall x \forall y(\neg Pxa \vee Gya) \end{aligned}$$

Oppgave 4: Førsteordens logikk (20 % = 30 min)

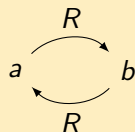
For hver av sekventene under, finn et LK-bevis (i grunn LK) for sekventen eller en motmodell som falsifiserer sekventen.

$$d) \vdash \forall x(Rxa \vee Rxb) \rightarrow \forall xRxx$$

- “Hvis alle liker a eller b , så liker alle seg selv.” – tvilsomt!
- Vi trenger en motmodell der alle liker enten a eller b , men der det finnes minst ett element som *ikke* liker seg selv.

Svar på 4 d):

Sekventen er *ikke* gyldig. La \mathcal{M} være en modell med domene $\{a, b\}$. La $a^{\mathcal{M}} = a$ og $b^{\mathcal{M}} = b$. La $R^{\mathcal{M}} = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$. Vi har nå at $\mathcal{M} \models \forall x(Rxa \vee Rxb)$ og at $\mathcal{M} \not\models \forall xPxx$, og \mathcal{M} falsifiserer dermed formelen i succedenten.



Oppgave 4: Førsteordens logikk (20 % = 30 min)

$$e) \vdash \exists x(Px \rightarrow (Pa \wedge Pb))$$

Svar på 4 e):

$$\frac{\frac{\frac{\times}{Pa \vdash Pa, \varphi} \quad \frac{\frac{\times}{Pa, Pb \vdash Pb, Pa \wedge Pb, \varphi} \quad Pa \vdash Pb, Pb \rightarrow (Pa \wedge Pb), \varphi}{Pa \vdash Pb, \varphi}}{Pa \vdash Pa \wedge Pb, \varphi}}{\vdash Pa \rightarrow (Pa \wedge Pb), \varphi}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow (Pa \wedge Pb))} \varphi$$

Oppgave 5: Sant eller usant (10 % = 15 min)

Er følgende påstander sanne eller usanne? Hvis påstanden er usann, så gi et moteksempel. Hvis påstanden er sann, så gi et kort argument.

- Hvis A er oppfylldbar og B er oppfylldbar, så er $A \wedge B$ oppfylldbar.
- Hvis A er oppfylldbar og B er oppfylldbar, så er $A \rightarrow B$ oppfylldbar.
- Det fins tre formler A , B og C slik at mengdene $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ og $\{A, C\}$ alle er oppfylldbare, men hvor mengden $\{A, B, C\}$ *ikke* er oppfylldbar.

Påstand a)

a) Hvis A er **oppfylldbar** og B er oppfylldbar, så er $A \wedge B$ oppfylldbar.

- En formel er **oppfylldbar** hvis det finnes en valuasjon som oppfyller den (tolker den som sann).
- Merk: A og B kan godt være sanne i *forskjellige* modeller!

Svar på 5 a):

Påstanden er *usann*.

Moteksempel: La $A = P$ og $B = \neg P$. Vi har da at både A og B er oppfylldbare (i hver sine modeller), at $A \wedge B = P \wedge \neg P$ *ikke* er oppfylldbar i noen modell.

Påstand b)

b) Hvis A er oppfylldbar og B er oppfylldbar, så er $A \rightarrow B$ oppfylldbar.

Svar på 5 a):

Påstanden er *sann*.

Bevis: Anta at A og B er oppfylldbare. Det finnes da en valuasjon v slik at $v \models B$. Men da har vi at $v \models A \rightarrow B$, pr. def. av valuasjoner. Dermed er $A \rightarrow B$ oppfylldbar.

Påstand c)

c) Det fins tre formler A , B og C slik at mengdene $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ og $\{A, C\}$ alle er oppfylldbare, men hvor mengden $\{A, B, C\}$ ikke er oppfylldbar.

Svar på 5 a):

Påstanden er *sann*.

La $A = P$, $B = P \rightarrow Q$ og $C = \neg Q$. Da er formlene parvis oppfylldbare, men mengden av alle formlene er *ikke* oppfylldbar: Enhver valuasjon som skal oppfylle $\{P, P \rightarrow Q, \neg Q\}$ må oppfylle P . Men hvis v samtidig skal oppfylle $P \rightarrow Q$, så må v også oppfylle Q . Men da vil v ikke oppfylle $\neg Q$.

Oppgave 6: Fri-variabel LK(20 % = 30 min)

Gi **korte** svar på følgende spørsmål.

- Finn en mest generell unifikator for termene $f(x, g(w))$ og $f(y, g(a))$.
- Gi en unifikator for termene i forrige spørsmål som *ikke* er mest generell.
- Hva vil det si at en substitusjon σ *lukker* en løvsekvent i en fri-variabel LK-utledning?
- Anta at π er en fri-variabel LK-utledning. Hvilke egenskaper må σ ha for at $\langle \pi, \sigma \rangle$ skal være et fri-variabel LK-bevis?

Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$. La π' være resultatet av å anvende σ på alle formlene i π .

- Er π' et grunt LK-bevis for $\Gamma \vdash \Delta$? Begrunn svaret.

Oppgave 6: Fri-variabel LK(20 % = 30 min)

- Finn en **mest generell unifikator** for termene $f(x, g(w))$ og $f(y, g(a))$.
 - En substitusjon σ er en **unifikator** for to termer t_1 og t_2 hvis $t_1\sigma = t_2\sigma$.
 - En substitusjon σ er **mer generell** enn en substitusjon τ hvis det finnes en substitusjon ρ slik at $\sigma\rho = \tau$.
 - En substitusjon σ er en **mest generell unifikator** for to termer hvis den er en unifikator for termene og den er mer generell enn alle andre unifikatorer for termene.

Svar på 6 a):

$\{y/x, a/w\}$

Finnes det flere mest generelle unifikatorer for termene?

Oppgave 6: Fri-variabel LK(20 % = 30 min)

- b) Gi en unifikator for termene i forrige spørsmål som *ikke* er mest generell.

Svar på 6 b):

$\{a/x, a/y, a/w\}$

Finnes det flere unifikatorer som ikke er mest generelle?

Oppgave 6: Fri-variabel LK(20 % = 30 min)

- c) Hva vil det si at en substitusjon σ lukker en løvsekvent i en fri-variabel LK-utledning?

Svar på 6 c):

σ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i en fri-variable LK-utledning hvis det finnes atomære formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.

Oppgave 6: Fri-variabel LK(20 % = 30 min)

- d) Anta at π er en fri-variabel LK-utledning. Hvilke egenskaper må σ ha for at $\langle \pi, \sigma \rangle$ skal være et fri-variabel LK-bevis?

Svar på 6 d):

Hvis σ er grunn og lukker alle løvsekventene i π , så er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et fri-variabel LK-bevis.

Oppgave 6: Fri-variabel LK(20 % = 30 min)

Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et fri-variable LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$. La π' være resultatet av å anvende σ på alle formlene i π .

- e) Er π' et grunt LK-bevis for $\Gamma \vdash \Delta$? Begrunn svaret.

Svar på 6 e):

Nei, dette stemmer ikke. La $\Gamma \vdash \Delta$ være sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$.

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pu \vdash Pa}{\forall xPx, Pu \vdash \forall xPx} R\forall \quad \sigma = \{a/u\}}{\forall xPx \vdash \forall xPx} L\forall \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\forall xPx, Pa \vdash Pa}{\forall xPx, Pa \vdash \forall xPx} R\forall \quad L\forall$$

La π være fri-variabel LK-utledningen til venstre. Løvsekventen kan lukkes med $\sigma = \{a/u\}$, slik at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et fri-variabel LK-bevis. Resultatet av å anvende σ på π vises til høyre. Dette er *ikke* en grunn LK-utledning, siden konstantsymbolet a som introduseres i δ -slutningen forekommer i konklusjonen.