Forelesning 16: Repetisjon

Christian Mahesh Hansen - 4. juni 2007

1 Kompletthet

1.1 Introduksjon

Definisjon 1.1 (Kompletthet)**.** *Sekventkalkylen* LK *er* komplett *hvis enhver gyldig sekvent er* LK*-bevisbar.*

- Beviset for kompletthet bygger på *modelleksistensteoremet*:

Teorem 1.1 (Modelleksistens)**.** *Hvis en sekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ ikke *er bevisbar i* LK*, så har den en motmodell.*

Kompletthet følger fra modelleksistens

- Anta nå at vi har vist modelleksistens.
- Kompletthet av LK følger umiddelbart fra modelleksistens.

Påstand

Sekventkalkylen LK er komplett.

Skal vise:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar i LK
Kontrapositivt:	$\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* bevisbar i LK	$\Rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* gyldig

Bevis. *Anta at sekventen* $\Gamma \vdash \Delta$ ikke *er bevisbar i* LK*. Da har* $\Gamma \vdash \Delta$ *en motmodell, ved modelleksistensteoremet. Men da er* $\Gamma \vdash \Delta$ ikke *gyldig.*

Hvordan vise modelleksistens?

Modelleksistens for både utsagnslogikk og førsteordens logikk er basert på den samme idéen:

1. Lag en maksimal utledning for en ikke-bevisbar sekvent.
2. Siden sekventen ikke er bevisbar, må den maksimale utledningen ha minst én åpen gren.
3. Konstruér en motmodell til rotsekventen fra den åpne grenen.

Kjernen i beviset blir å vise at valuasjonen eller modellen man konstruerer fra den åpne grenen faktisk er en motmodell til rotsekventen i utledningen.

Vi viser dette ved induksjon på formlene i grenen.

1.2 Modelleksistens for utsagnslogikk

Teorem 1.2 (Modelleksistens). *Hvis en sekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ ikke *er bevisbar i* LK*, så har den en motmodell.*

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar.
- Lag en *maksimal* LK-utledning π for $\Gamma \vdash \Delta$, dvs. en utledning der enhver formel på enhver gren er ekspandert.
- I utsagnslogikk er π en *endelig* objekt, siden vi startet med et endelig antall formler i rotsekventen og hver formel kun kan ekspanderes én gang i hver gren.
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må π ha en åpen gren G. (Hvis ikke, ville $\Gamma \vdash \Delta$ vært bevisbar.)
- Vi definerer to mengder:
  - $\mathsf{G}^\top$ inneholder alle antecedentformler på G
  - $\mathsf{G}^\perp$ inneholder alle succedentformler på G

Konstruksjon av valuasjon

- Vi konstrerer en valuasjon v på utsagnsvariable P som følger:

$$v(P) = \mathbf{1} \quad \text{hvis og bare hvis} \quad P \in \mathsf{G}^\top$$

- Valuasjonen v er *veldefinert*, dvs. at ikke både $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(P) = \mathbf{0}$ for en utsagnsvariabel P. Dette følger fra at G *ikke* er lukket.

Påstand

For alle *formler* $A \in \mathsf{G}$ har vi at

- $A \in \mathsf{G}^\top$ impliserer at $v(A) = \mathbf{1}$, og
- $A \in \mathsf{G}^\perp$ impliserer at $v(A) = \mathbf{0}$.

- Anta at vi har vist påstanden over.
- Siden $\Gamma \subseteq \mathsf{G}^\top$ har vi at $v \models \Gamma$.
- Siden $\Delta \subseteq \mathsf{G}^\perp$ har vi at v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Dermed er v en motmodell til rotsekventen $\Gamma \vdash \Delta$.

Konstruert valuasjon er motmodell

$$\text{Konstruksjon av } v: \qquad v(P) = \mathbf{1} \quad \text{hvis og bare hvis} \quad P \in \mathsf{G}^{\top}$$

Påstand

For alle *formler* $A \in \mathsf{G}$ har vi at

- $A \in \mathsf{G}^{\top}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{1}$, og
- $A \in \mathsf{G}^{\perp}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{0}$.

Bevis. *Ved strukturell induksjon på $A \in \mathsf{G}$.*

Basistilfelle: Anta at A er en utsagnsvariabel P. Det følger da fra definisjonen av v at $v(P) = \mathbf{1}$ hvis $P \in \mathsf{G}^{\top}$ og $v(P) = \mathbf{0}$ hvis $P \in \mathsf{G}^{\perp}$.

Konstruert valuasjon er motmodell

Påstand

For alle *formler* $A \in \mathsf{G}$ har vi at

- $A \in \mathsf{G}^{\top}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{1}$, og
- $A \in \mathsf{G}^{\perp}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{0}$.

Bevis $(B \wedge C \in \mathsf{G}^{\top})$**.** *Induksjonssteg: Anta at A er på formen $B \wedge C$, og at $B \wedge C \in \mathsf{G}^{\top}$. Vi må vise at $v(B \wedge C) = \mathbf{1}$.*

Siden utledningen er maksimal, vet vi at $B \wedge C$ er hovedformel i en $\mathsf{L}\wedge$-slutning på G. Derfor har vi at $B \in \mathsf{G}^{\top}$ og $C \in \mathsf{G}^{\top}$.

Siden B og C er av enklere struktur enn $B \wedge C$, kan vi bruke induksjonshypotesen på B og C. Vi får at $v(B) = \mathbf{1}$ og $v(C) = \mathbf{1}$. Men da har vi at $v(B \wedge C) = \mathbf{1}$, pr. def. av valuasjoner.

Konstruert valuasjon er motmodell

Påstand

For alle *formler* $A \in \mathsf{G}$ har vi at

- $A \in \mathsf{G}^{\top}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{1}$, og
- $A \in \mathsf{G}^{\perp}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{0}$.

Bevis $(B \to C \in \mathsf{G}^{\top})$**.** *Induksjonssteg: Anta at A er på formen $B \to C$, og at $B \to C \in \mathsf{G}^{\top}$. Vi må vise at $v(B \to C) = \mathbf{1}$.*

Siden utledningen er maksimal, vet vi at $B \to C$ er hovedformel i en $\mathsf{L}\!\to$-slutning på G. Derfor har vi at (1) $B \in \mathsf{G}^{\perp}$ eller at (2) $C \in \mathsf{G}^{\top}$. Siden B og C er av enklere struktur enn $B \to C$, kan vi bruke bruke induksjonshypotesen (IH) i begge tilfellene.

I tilfelle (1) har vi ved IH at $v(B) = \mathbf{0}$. I tilfelle (2) har vi ved IH at $v(C) = \mathbf{1}$. Uansett har vi da at $v(B \to C) = \mathbf{1}$, pr. def. av valuasjoner.

Konstruert valuasjon er motmodell

- De andre tilfellene går tilsvarende: $\neg B \in \mathsf{G}^{\top}$, $\neg B \in \mathsf{G}^{\perp}$, $B \wedge C \in \mathsf{G}^{\perp}$, $B \vee C \in \mathsf{G}^{\top}$, $B \vee C \in \mathsf{G}^{\perp}$ og $B \to C \in \mathsf{G}^{\perp}$
- Vi har nå vist utsagnslogisk modelleksistens.
- Beviset for førsteordens modelleksistens går tilsvarende, men det er et par ting vi må passe på...

1.3 Modelleksistens for førsteordens logikk

- *Grenseutledning:* Objektet vi får når vi gjøre alle mulige ekspansjoner i hver gren er *uendelig* pga. γ-slutningene.
- *Rettferdig strategi:* Vi må sørge for å instansiere γ-formler med alle mulige termer i hver gren.
- *Herbrandmodeller:* Vi konstruerer en Herbrandmodell $\mathcal{M}$ fra en åpen gren G i grenseutledningen.
  - Domenet til modellen er Herbranduniverset til G.
  - Lukkede termer tolkes som seg selv.
  - $\mathcal{M} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ hvis og bare hvis $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{G}^{\top}$
- *Modelleksistens:* Induksjonen er lik som i utsagnslogikk for α- og β-formler. I tillegg må vi ta for oss γ- og δ-formler.

2 Førsteordens sekventkalkyle

2.1 Introduksjon

- Vi har sett på to sekventkalkyler for førsteordens logikk:
  - Én kalkyle *uten* frie variable som vi kaller for *grunn* LK.
  - Én kalkyle *med* frie variable som vi kaller for *fri-variabel* LK.
- For førsteordens sekventkalkyle introduserte vi to nye regeltyper:
  - γ-regler for analyse av "for alle"-uttrykk; for *alle* elementer ...
  - δ-regler for analyse av "eksisterer"-uttrykk; for *ett* element ...
- Termer tolkes som elementer i domenet, derfor må vi i γ-formler kunne sette vilkårlige termer.
- Tilsvarende må vi i δ-formler sette inn en *termrepresentant* for det ene elementet som skal eksistere.

- Husk at vi *falsifiserer* succedentformler!
  - $\neg\forall x\varphi$ er ekvivalent med $\exists x\neg\varphi$
  - $\neg\exists x\varphi$ er ekvivalent med $\forall x\neg\varphi$

2.2 Grunn LK

γ-reglene i grunn LK:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathrm{R}\exists$$

t er en *lukket* term

δ-reglene i grunn LK:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som *ikke* forekommer i konklusjonen

2.3 Fri-variabel LK

γ-reglene i fri-variabel LK:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathrm{R}\exists$$

u er en variabel som ikke forekommer fritt i utledningen fra før

δ-reglene i fri-variabel LK:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

f er en Skolemfunksjon som ikke forekommer i utledningen fra før
$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

Fri-variabel LK-bevis:

Et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er et par $\langle \pi, \sigma \rangle$ slik at

- π er en fri-variabel LK-utledning for $\Gamma \vdash \Delta$
- σ er en *grunn* substitusjon som lukker alle løvsekventene i π

- *Støtten* til en substitusjon σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.
- En substitusjon σ er *grunn* hvis $x\sigma$ er en grunn term (lukket term) for alle variable x i støtten til σ.

3 Intuisjonistisk logikk

3.1 Introduksjon

- Kontradiksjonsprinsippet: $\neg(P \wedge \neg P)$ – en påstand og dens negasjon kan ikke være sanne samtidig
- Loven om det utelukkede tredje: $P \vee \neg P$ – en påstand er enten sann eller usann
- I klassisk logikk holder begge, men i intuisjonistisk logikk holder bare kontradiksjonsprinsippet.
- Sannhet betyr at vi kan verifisere.
- Intuisjonistisk sekvent: $\Gamma \vdash A$ eller $\Gamma \vdash$
- Sekventkalkylen **LJ**: essensielt **LJ** begrenset til intuisjonistiske sekventer.
- *Husk:* Alt som er bevisbart i **LJ** er også bevisbart i **LK**, men *ikke* omvendt!

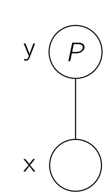
3.2 Kripkesemantikk

- En *Kripke-modell* er et trippel $(S, \leq, \Vdash')$ der S er en mengde punkter, og $\leq$ er en partiell ordning på S.
- $\Vdash'$ er en binær *relasjon* fra S til mengden av atomære formler. $\Vdash'$ er *monoton*, dvs. hvis $x \Vdash' P$ og $x \leq y$, så $y \Vdash' P$.
- $\Vdash'$ utvides til $\Vdash$, som er def. for alle formler:
  - $x \Vdash P$ hviss $x \Vdash' P$ for atomær P
  - $x \Vdash A \wedge B$ hviss $x \Vdash A$ og $x \Vdash B$
  - $x \Vdash A \vee B$ hviss $x \Vdash A$ eller $x \Vdash B$
  - $x \Vdash A \rightarrow B$ hviss vi for enhver y slik at $x \leq y$ har at:
    hvis $y \Vdash A$, så $y \Vdash B$
  - $x \Vdash \neg A$ hviss for enhver y slik at $x \leq y$: $y \nVdash A$
- Et punkt i x i en Kripke-modell er en *motmodell* til en sekvent $\Gamma \vdash C$ hvis $x \Vdash \Gamma$ and $x \nVdash C$. Hvis det finnes et slikt punkt i modellen sier vi at *Kripke-modellen* er en motmodell til sekventen.
- *Merk:* $x \nVdash F$ betyr $\langle x, F\rangle \notin \Vdash$

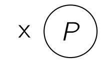
Eksempel: $P \vee \neg P$

Det å vise at formelen $P \vee \neg P$ ikke er intuisjonistisk gyldig tilsvarer å vise at den intuisjonistiske sekventen $\vdash P \vee \neg P$ ikke er gyldig.

- Kripkemodellen må ha et punkt x slik at $x \nVdash P \vee \neg P$.
- Pr. def. av Kripkemodeller må da $x \nVdash P$ og $x \nVdash \neg P$.
- $x \Vdash \neg P$ hviss for alle y slik at $x \leq y$: $y \nVdash P$.
- $x \nVdash \neg P$: det finnes et punkt y slik at $x \leq y$ og $y \Vdash P$.



Eksempel: $P \vdash \neg P$ **(oppgavesett 5, oppgave 2.1)**

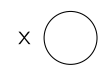


- Modellen må ha et punkt x slik at $x \Vdash P$ og $x \nVdash \neg P$.
- $x \Vdash \neg P$ hviss for alle y slik at $x \leq y$: $y \nVdash P$.
- $x \nVdash \neg P$: det finnes et punkt y slik at $x \leq y$ og $y \Vdash P$.
- Men hvorfor ikke velge x? Husk at $x \leq x$!

Verifikasjon: $x \Vdash P$ **og** $x \nVdash \neg P$

1. $x \Vdash P$ (siden $x \Vdash' P$)
2. 1. og $x \leq x$ medfører at $x \nVdash \neg P$ (pr. def. av $\Vdash$)

Eksempel: $\neg P \vdash P$ **(oppgavesett 5, oppgave 2.2)**

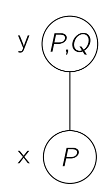


- Modellen må ha et punkt x slik at $x \Vdash \neg P$ og $x \nVdash P$.
- $x \Vdash \neg P$ hviss for alle y slik at $x \leq y$: $y \nVdash P$.
- Derfor må $x \nVdash P$ og for alle $x \leq y$: $y \nVdash P$.

Verifikasjon: $x \Vdash \neg P$ **og** $x \nVdash P$

1. $x \nVdash P$ (siden $x \nVdash' P$)
2. Det finnes ingen punkter y slik at $x < y$.
3. 1. og 2. medfører at $x \Vdash \neg P$ (pr. def. av $\Vdash$)

Eksempel: $\neg Q \to \neg P \vdash P \to Q$ **(oppg.sett 5, oppg. 2.3)**

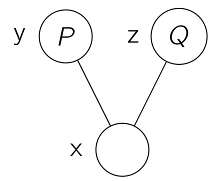


- Må ha punkt x slik at $x \Vdash \neg Q \to \neg P$ og $x \nVdash P \to Q$
- $x \nVdash P \to Q$: finnes punkt $y \geq x$ s.a. $y \Vdash P$ og $y \nVdash Q$
- $x \Vdash \neg Q \to \neg P$: $y \geq x \;\Rightarrow\; y \nVdash \neg Q$ eller $y \Vdash \neg P$
- $y \nVdash \neg Q$: finnes $z \geq y$ s.a. $z \Vdash Q$

Verifikasjon: $x \Vdash \neg Q \to \neg P$ **og** $x \nVdash P \to Q$

1. $y \Vdash Q$ (siden $y \Vdash' Q$)
2. 1. og $y \leq y$ medfører at $y \nVdash \neg Q$ (pr. def. av $\Vdash$)
3. 1. og $x \leq y$ medfører at $x \nVdash \neg Q$ (pr. def. av $\Vdash$)
4. 2. og 3. medfører at $x \Vdash \neg Q \to \neg P$ (pr. def. av $\Vdash$)
5. $x \Vdash P$ og $x \nVdash Q$ (siden $x \Vdash' P$ og $x \nVdash' Q$)
6. 5. og $x \leq x$ medfører at $x \nVdash P \to Q$ (pr. def. av $\Vdash$)

Eksempel: $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$ **(oppg.sett 5, oppg. 2.4)**

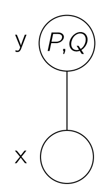


- Må ha x slik at $x \Vdash \neg(P \wedge Q)$ og $x \nVdash \neg P \vee \neg Q$
- $x \Vdash \neg(P \wedge Q)$: $y \geq x \;\Rightarrow\; y \nVdash P \wedge Q$
- $y \nVdash P \wedge Q$: $y \nVdash P$ eller $y \nVdash Q$
- $x \nVdash \neg P \vee \neg Q$: $x \nVdash \neg P$ og $x \nVdash \neg Q$

Verifikasjon: $x \Vdash \neg(P \wedge Q)$ **og** $x \nVdash \neg P \vee \neg Q$

1. $x \nVdash P \wedge Q$, $y \nVdash P \wedge Q$ og $z \nVdash P \wedge Q$ (pr. def. av $\Vdash$)
2. 1. medfører $x \Vdash \neg(P \wedge Q)$ (pr. def. av $\Vdash$)
3. $y \Vdash P$ og $x \leq y$ medfører $x \nVdash \neg P$ (pr. def. av $\Vdash$)
4. $z \Vdash Q$ og $x \leq z$ medfører $x \nVdash \neg Q$ (pr. def. av $\Vdash$)
5. 3. og 4. medfører at $x \nVdash \neg P \vee \neg Q$ (pr. def. av $\Vdash$)

Eksempel: $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$ **(oppg.sett 5, oppg. 2.5)**



- Må ha x slik at $x \Vdash P \to Q$ og $x \nVdash \neg P \vee Q$
- $x \Vdash P \to Q$: $y \geq x \;\Rightarrow\; y \nVdash P$ eller $y \Vdash Q$
- $x \nVdash \neg P \vee Q$: $x \nVdash \neg P$ og $x \nVdash Q$
- $x \nVdash \neg P$: finnes $z \geq x$ s.a. $z \Vdash P$

Verifikasjon: $x \Vdash P \to Q$ **og** $x \nVdash \neg P \vee Q$

1. $x \nVdash P$ og $y \Vdash Q$ (siden $x \nVdash' P$ og $y \Vdash' Q$)
2. 1. medfører at $x \Vdash P \to Q$ (pr. def. av $\Vdash$)
3. $y \Vdash P$ (siden $y \Vdash' P$)
4. 3. og $x \leq y$ medfører at $x \nVdash \neg P$ (pr. def. av $\Vdash$)
5. $x \nVdash Q$ (siden $x \nVdash' Q$)
6. 4. og 5. medfører $x \nVdash \neg P \vee Q$ (pr. def. av $\Vdash$)

Tips og triks

- $x \nVdash F$ betyr at $x \Vdash F$ *ikke* holder!
- Lage Kripkemotmodell:
  - Finn ut hva slags egenskaper Kripkemodellen må ha ved å bruke definisjonen av $\Vdash$.
  - Kombinér egenskapene til en modell.
  - Verifisér at modellen faktisk falsifiserer sekventen.
- Hvis en sekvent $\Gamma \vdash C$ *ikke* er bevisbar i **LK**, så er den heller ikke bevisbar i **LJ**. (Husk: **LJ** er en begrenset versjon av **LK**.)
- Hvis en sekvent $\Gamma \vdash C$ ikke er gyldig i *klassisk* logikk, så:
  - er den heller ikke *intuisjonistisk* gyldig
  - har den en Kripkemotmodell bestående av ett punkt (tilsvarende en falsifiserende valuasjon)

Lykke til på eksamen!

Takk for nå og lykke til på eksamen!

Husk å svare på emneevalueringen!