INF3170 – Logikk

Obligatorisk oppgave 2 – vår 2007

Førsteordens logikk

I de følgende oppgavene, la R være et relasjonssymbol med aritet 2. Du trenger ikke gi et formelt bevis for at formelen du lager har de oppgitte egenskapene, men du bør gi en kort uformell begrunnelse. I oppgave 2-4 bør du også oppgi modellen som oppfyller formelen i henhold til oppgavens punkt to.

Oppgave 1 Lag en førsteordens formel φ som inneholder R slik at

a. $\mathcal{M} \models \varphi$ hvis og bare hvis $R^{\mathcal{M}}$ er en refleksiv relasjon på $|\mathcal{M}|$.

b. $\mathcal{M} \models \varphi$ hvis og bare hvis $R^{\mathcal{M}}$ er en symmetrisk relasjon på $|\mathcal{M}|$.

c. $\mathcal{M} \models \varphi$ hvis og bare hvis $R^{\mathcal{M}}$ er en transitiv relasjon på $|\mathcal{M}|$.

d. $\mathcal{M} \models \varphi$ hvis og bare hvis $R^{\mathcal{M}}$ er en ekvivalensrelasjon på $|\mathcal{M}|$.

Oppgave 2 Lag en førsteordens formel φ som inneholder R slik at φ har *begge* de følgende egenskaper.

- Det finnes ingen modell med nøyaktig *ett* element i domenet som oppfyller φ.
- Det finnes en modell med to eller flere elementer i domenet som oppfyller φ.

Oppgave 3 Lag en førsteordens formel φ som inneholder R slik at φ har *begge* de følgende egenskaper.

- Det finnes ingen modell med mindre enn tre elementer i domenet som oppfyller φ.
- Det finnes en modell med tre eller flere elementer i domenet som oppfyller φ.

Oppgave 4 Lag en førsteordens formel φ som inneholder R slik at φ har *begge* de følgende egenskaper.

- Det finnes ingen modell med endelig domene som oppfyller φ.
- Det finnes en modell med uendelig domene som oppfyller φ.

Sekventkalkyle

Oppgave 5 Vis at hvis A og B er ekvivalente formler, så er sekventen $\Gamma, A \vdash B, \Delta$ LK-bevisbar.

Oppgave 6 En *avledet LK-regel* er en regel hvor regelens konklusjon er bevisbar fra reglens premisser ved å bruke reglene fra LK, vanligvis i flere steg. (I denne oppgaven regner vi Snitt og de strukturelle reglene LW, RW, LC og RC som LK-regler.) Et eksempel er sekventkalkylevarianten av *reductio ad absurdum*. Den avledede regelen er skrevet til venstre; dens begrunnelse i LK er skrevet til høyre:

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\,(*) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}}{\Gamma \vdash \neg A, A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg \qquad \dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash A, \Delta}\,\mathsf{RW}}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,\mathsf{Snitt}$$

Legg merke til bruken av snitt og strukturelle regler. *LK-utledningen til høyre samsvarer med den avledede regelen m.h.p. alle løvnoder som ikke er lukket.* Dermed er den avledede regelen tillatt.

Vis at følgende regler er avledede:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,(1) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg\neg\neg A \vdash \Delta}\,(2) \qquad \dfrac{\Gamma, A, \neg B \vdash \Delta}{\Gamma, \neg(A \to B) \vdash \Delta}\,(3) \qquad \dfrac{\Gamma, A \vee B, A \vee C \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee (B \wedge C) \vdash \Delta}\,(4)$$

Hint til (4): Bruk at $A \vee (B \wedge C)$ er ekvivalent med $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$, og bruk Snitt og LW.

Oppgave 7

Vi har sett på følgende definisjoner av sunnhet og kompletthet for sekventkalkylen LK.

(Sunnhet)	Enhver bevisbar sekvent er gyldig.
(Kompletthet)	Enhver gyldig sekvent er bevisbar.

Vi sier at en mengde utsagnslogiske formler Γ er *oppfyllbar* hvis det finnes en valuasjon v som oppfyller alle formlene i Γ. Videre sier vi at Γ er *konsistent* hvis sekventen $\Gamma \vdash$ *ikke* er LK-bevisbar. Oppfyllbarhet er et semantisk begrep og konsistens er et syntaktisk begrep. Se på følgende utsagn:

(1) Enhver oppfyllbar mengde er konsistent.

(2) Enhver konsistent mengde er oppfyllbar.

Vis at følgende påstander holder.

a. Utsagn (1) er ekvivalent med sunnhet, dvs. (Sunnhet) $\Leftrightarrow$ (1).

b. Utsagn (2) er ekvivalent med kompletthet, dvs. (Kompletthet) $\Leftrightarrow$ (2).

Hint: For hver påstand får vi to delbevis; ett for $\Rightarrow$ og ett for $\Leftarrow$. Ha klart for deg hva du må anta og hva du skal vise i hvert delbevis. Husk at hver av påstendene er en implikasjon i seg selv, så for f.eks. (a.) må vi vise både

$$(\Gamma \vdash \Delta \text{ er bevisbar} \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ er gyldig}) \quad \Rightarrow \quad (\Gamma \text{ er oppfyllbar} \Rightarrow \Gamma \text{ er konsistent})$$

og

$$(\Gamma \vdash \Delta \text{ er bevisbar} \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ er gyldig}) \quad \Leftarrow \quad (\Gamma \text{ er oppfyllbar} \Rightarrow \Gamma \text{ er konsistent}).$$

Så i f.eks. andre delbevis for (a.) må vi anta at (1) er sann, og at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar. Vi må så vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig. Trikset her er å bruke antakelsen om at (1) er sann til å gå fra en syntaktisk begrep ($\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar) til et semantisk begrep ($\Gamma \vdash \Delta$ gyldig). Vi kan ikke bruke (1) til dette uten videre, men må omforme sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ til en sekvent $\Gamma' \vdash$ som vi kan bruke (1) på. Her kan muligens de avledede reglene fra forrige oppgave (spesielt (*) og (1)) komme godt med. Du kan også fritt bruke at de avledede reglene er sunne. Det kan muligens også være lurt å titte på resultatene fra oppgave 5 i oblig 1.