INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 7

Unifisering

I forelesning 10 så vi på en unifiseringsalgoritme som finner en mest generell unifikator for *to* termer. I automatisk bevissøk har vi imidlertid bruk for å sjekke om *flere* par av termer er unifiserbare *samtidig*. Se på sekventen

$$P(k(x,z), f(y, q(v,a))) \vdash P(k(g(y), j(v)), f(h(z,a), w)),$$

der x, y, z, v, w er variable, f, g, h, j, k, q er funksjonssymboler og P er et relasjonssymbol. For å gjøre de to atomære formlene like, må vi finne en substitusjon σ slik at

$$k(x,z) =_\sigma k(g(y), j(v)) \quad og \quad f(y, q(v,a)) =_\sigma f(h(z,a), w)$$

samtidig. (Notasjon: $s =_\sigma t$ betyr $s\sigma = t\sigma$.) Vi kan bruke unifiseringsalgoritmen fra forelesningen til også å løse slike problemer. Hvis vi betrakter relasjonssymbolet P som et funksjonssymbol, kan vi la de to atomære formlene være de to termene som skal unifiseres. Generelt kan vi bruke algoritmen til å løse unifiseringsproblemer på formen

$$s_1 =^? t_1, \ldots, s_n =^? t_n$$

ved å unifisere termene $\circ(s_1, \ldots, s_n)$ og $\circ(t_1, \ldots, t_n)$, der $\circ$ er et vilkårlig funksjomssymbol med aritet n. (Notasjon: $s =^? t$ uttrykker at vi ønsker å unifisere termene s og t.) Vi sier at en *unifikator* for et slikt unifiseringsproblem er en substitusjon σ slik at

$$s_1 =_\sigma t_1, \ldots, s_n =_\sigma t_n.$$

Oppgave 1 Finn en mest generell unifikator (hvis noen finnes) for følgende unifiseringsproblemer.

a. $k(x,z) =^? k(g(y), j(v))$ og $f(y, q(v,a)) =^? f(h(z,a), w)$

b. $x =^? f(y)$ og $y =^? g(x)$

Oppgave 2 Vis at for alle substitusjoner σ og τ, og for alle førsteordens formler φ så er $\varphi(\sigma\tau) = (\varphi\sigma)\tau$. (Hint: strukturell induksjon.)

Fri-variabel semantikk

La φ være formelen $\exists x \mathsf{Liker}(x,y)$. Vi ser at variabelen y forekommer fritt i φ. La modellen $\mathcal{M}$ være slik at $|\mathcal{M}| = \{\mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}\}$, og $\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} = \{\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari} \rangle\}$. Anta videre at vi har konstantsymbolene a og b i signaturen vår, og at $a^{\mathcal{M}} = \text{Ola}$ og $b^{\mathcal{M}} = \text{Kari}$. La σ være en grunn substitusjon slik at $\sigma = \{b/y\}$. Vi lar μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$ slik at $\mu(y) = (y\sigma)^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = \text{Kari}$ (hvordan μ tolker andre variable enn y ser vi bort fra i denne sammenhengen). Vi ser at både

$$(1) \quad \mathcal{M}, \mu \models \varphi$$

og[1]

$$(2) \quad \mathcal{M} \models \varphi\sigma$$

holder. Vi har definert μ slik at μ tolker y – den eneste frie variabelen i φ – som det samme objektet som $(y\sigma)^{\mathcal{M}}$. Det er derfor ikke så overraskende at både (1) og (2) holder. Generelt kan vi definere følgende lemma.

Lemma 0.1. *La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ, så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.*

Oppgave 3 Vis lemmaet over. (Hint: Strukturell induksjon på formler.)

Sunnhet av fri-variabel LK

I fri-variabel LK definerte vi δ-reglene som

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\,\mathsf{R}\forall$$

der symbolene f og $\vec{u}$ ble definert på følgende måte:

(I)
- f er ny for *utledningen*
- $\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de variablene som forekommer fritt i *hovedformelen*

I beviset for sunnhet av kalkylen står følgende lemma sentralt.

Lemma 0.2 (Falsifiserbarhet)**.** *Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.*

Beviset går ved strukturell induksjon på utledninger. I induksjonssteget antar vi at lemmaet holder for en utledning π med falsifiserbar rotsekvent og viser at lemmaet holder for utledningen π', som vi får ved å anvende en LK-regel θ på en løvsekvent i π. Siden vi har antatt at lemmaet holder for π og at π har falsifiserbar rotsekvent, så finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π. Ved definisjonen av falsifiserbarhet så vet vi at for hver variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$, så finnes en gren G i π som er falsifisert[2] av $\mathcal{M}$ under μ.

Vi må vise at π' er falsifiserbar. Dette gjør vi ved å finne en modell $\mathcal{M}'$ som *falsifiserer* den utvidete utledningen π'. Framgangsmåten avhenger av hvilken regel vi brukte for å utvide π til π'. Vi får ett tilfelle for hver av LK-reglene. Siden vi pr. antagelse allerede har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π så er det en god idé å forsøke å bruke denne som motmodell til π' også. Dette fungerer fint for α-, β- og γ-reglene. Beviset for f.eks. L$\rightarrow$ kan gjøres på følgende måte.

[1] I det siste tilfellet behøver vi ikke μ for å tolke $\varphi\sigma$, siden $\varphi\sigma$ er en lukket formel.

[2] Dvs. $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ for alle $\varphi \in \mathsf{G}^{\top}$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$ for alle $\psi \in \mathsf{G}^{\perp}$

Bevis (induksjonssteget for L$\rightarrow$*).* La θ være en slutning på formen

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}.$$

Legg merke til at konklusjonen i θ er løvsekvent i π, men ikke i den utvidete utledningen π'. Premissene i θ er begge løvsekventer i π', men ikke i π. La G være den grenen i π som har konklusjonen i θ som løvsekvent. La G$'$ og G$''$ være grenene i π' som har henholdsvis venstre og høyre premiss i θ som løvsekventer.

Vi skal vise at π' er falsifiserbar, dvs. at det finnes en modell $\mathcal{M}'$ som falsifiserer π'. Vi setter $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ og viser at $\mathcal{M}$ falsifiserer π'. La μ' være en vilkårlig variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Hvis vi kan vise at det finnes en gren i π' som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ', så er vi i mål. Pr. antagelse så finnes det en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ'. Vi har to tilfeller:

1. Den falsifiserte grenen er en annen enn G.
2. Den falsifiserte grenen er G.

I tilfelle (1), så er den falsifiserte grenen også en gren i π', og vi er i mål. Anta derfor at vi har tilfelle (2), dvs. at G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ'. Vi må vise at G$'$ eller G$''$ er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ'. Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ' og $A \rightarrow B \in \mathsf{G}^\top$, så har vi at $\mathcal{M}, \mu' \models A \rightarrow B$. Ved definisjonen av tolkning av formler med frie variable så har vi at (2a) $\mathcal{M}, \mu' \not\models A$ eller (2b) $\mathcal{M}, \mu' \models B$. I tilfelle (2a) så er G$'$ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ'. I tilfelle (2b) så er G$''$ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ'. $\square$

De to første avsnittene i beviset kan også brukes i induksjonssteget for de andre α-, β- og γ-reglene. Det er det siste avsnittet i beviset som blir spesifikt for regelen. Den generelle framgangsmåten er imidlertid den samme:

1. Vi bruker antagelsen om at $\mathcal{M}, \mu'$ gjør hovedformelen sann eller usann (avhengig av om det er en ventre- eller høyreregel vi skal vise).
2. Vi bruker fri-variabel semantikken til å finne ut hvilke sannhetsverdier de aktive formlene får av $\mathcal{M}, \mu'$.
3. Vi konkluderer med at G$'$ eller G$''$ er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ'.

Legg merke til at resonnementet er likt det vi brukte for å vise at reglene bevarer falsifiserbarhet oppover i utsagnslogisk LK og grunn førsteordens LK. Det er imidlertid en viktig forskjell: I fri-variabel LK viser vi at reglene *bevarer falsifiserbarhet av utledninger*.

Oppgave 4 Gjør induksjonssteget i beviset for falsifiserbarhetslemmaet for LK-reglene L$\neg$, R$\neg$, R$\rightarrow$, R$\lor$, L$\land$, R$\land$ og R$\exists$.

For δ-reglene kan vi ikke bruke $\mathcal{M}$ som falsifiserende modell for π'. Vi må definere en ny modell $\mathcal{M}'$ som er lik $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av Skolemsymbolet f i den introduserte Skolemtermen $f(u_1, \ldots, u_n)$. Husk at $f^{\mathcal{M}'}$ er en funksjon fra $|\mathcal{M}'|^n$ til $|\mathcal{M}'|$. Vi må derfor spesifisere et element $e \in |\mathcal{M}'|$ som verdi for $f^{\mathcal{M}'}$ for alle elementer $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in |\mathcal{M}'|^n$. Termen $f(u_1, \ldots, u_n)$ inneholder imidlertid frie variable, så vi må bruke variabeltilordninger for å kunne tolke den. For en variabeltilordning μ' for $\mathcal{M}'$ har vi at

$$\mu'(u_1), \ldots, \mu'(u_n) = a_1, \ldots, a_n,$$

der $\mu'(u_i) = a_i \in |\mathcal{M}'|$ for $1 \leq i \leq n$, altså et element i $|\mathcal{M}'|^n$. En annen variabeltilordning kan gi et annet element i $|\mathcal{M}'|^n$. Vi må derfor spesifisere tolkningen $f(u_1, \ldots, u_n)^{\mathcal{M}', \mu'}$ for hver variabeltilordning μ' for $\mathcal{M}'$. For L$\exists$ med hovedformel $\exists x \varphi$ gjøres det på følgende måte:

- Anta at $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle^{\mu'} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.
- Hvis $\exists x\varphi$ er sann i $\mathcal{M}$ under[3] μ', så finnes en $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\varphi[\bar{e}/x]$ er sann i $\mathcal{M}$ under μ'. Siden $|\mathcal{M}|$ og $|\mathcal{M}'|$ er like, så er e også med i $|\mathcal{M}'|$. La $f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = e$.
- Hvis $\exists x\varphi$ er usann i $\mathcal{M}$ under μ', la $f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = d$ for et vilkårlig element $d \in |\mathcal{M}'|$.

For R$\forall$ blir definisjonen tilsvarende, bortsett fra at vi i det andre punktet setter $f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = e$ hvis hovedformelen er *usann* i $\mathcal{M}$ under μ'. Vi må så vise at modellen $\mathcal{M}'$ falsifiserer π'. For L$\exists$ kan beviset gjøres slik.

Bevis ($\mathcal{M}'$ falsifiserer π' når θ er L$\exists$*).* La μ' være en vilkårlig variabeltilordning for $\mathcal{M}'$. Vi må vise at det finnes en gren i π' som er falsifisert av $\mathcal{M}'$ under μ'. La G og G$'$ være definert på samme måte som i beviset for L$\rightarrow$. Siden $\mathcal{M}$ og $\mathcal{M}'$ er like bortsett fra tolkingen av f, *og siden f ikke forekommer i π*, så vil $\mathcal{M}$ og $\mathcal{M}'$ tolke alle symboler i π på samme måte. Siden $\mathcal{M}$ falsifiserer π, så vil også $\mathcal{M}'$ falsifisere π. Det finnes derfor en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}'$ under μ'. Vi har to tilfeller:

- Den falsifiserte grenen er en annen enn G.
- Den falsifiserte grenen er G.

I tilfelle (1) har vi at den falsifiserte grenen i π også er en gren i π', og vi er i mål. Anta derfor at vi har tilfelle (2), dvs. at G er falsifisert av $\mathcal{M}'$ under μ'. Vi må vise at G$'$ er falsifisert av $\mathcal{M}'$ under μ'. $\square$

Oppgave 5 Fullfør argumentet i beviset over. (Hint: Argumentet går tilsvarende som for L$\rightarrow$ ved å bruke semantikken. Bruk definisjonen av $\mathcal{M}'$ sin tolkning av f for å komme i mål.)

Oppgave 6 Gjør induksjonssteget i beviset for falsifiserbarhetslemmaet for LK-regelen R$\forall$.

Det er flere måter å definere δ-reglene på enn den vi har gitt over, men ikke alle er sunne. Se på følgene alternative definisjoner:

(II)
- f er ny for *utledningen*
- $\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de variablene som forekommer fritt i *konklusjonen*

(III)
- f er ny for *konklusjonen*
- $\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de variablene som forekommer fritt i *hovedformelen*

Oppgave 7 Hvilke av alternativene (II) og (III) er *sunne*? Hvis definisjonen er sunn, forklar hvorfor. Hvis ikke, finn et *moteksempel*, dvs. en utledning med falsifiserbar rotsekvent som kan lukkes hvis man bruker den alternative δ-regelen. (Hint: Se på beviset for L$\exists$ over. Her bruker vi at *f ikke forekommer i π* til å "fiske fram" en falsifisert gren i π'. Vil dette by på problemer med (II) eller (III)?)

Vi skal til slutt se på en variant av δ-regelen der vi tillater en viss gjenbruk av Skolemsymboler.

Definisjon 0.1 (Funksjonen sko)**.** *La sko være en funksjon som tar en δ-formel som argument og returnerer en Skolemfunksjon. For to δ-formler φ og ψ så har vi at sko(φ) = sko(ψ) hvis og bare hvis $\varphi = \psi$.*

[3] Siden $\mathcal{M}$ og $\mathcal{M}'$ har det samme domenet, så er alle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$ også variabeltilordninger for $\mathcal{M}'$ og vice versa.

Vi definerer δ-regelen som følger.

$$\text{(IV)} \qquad \begin{array}{l} - \ f = \text{sko}(\psi) \text{ der } \psi \text{ er hovedformelen} \\ - \ \vec{u} = u_1, \ldots, u_n \text{ er de variablene som forekommer fritt i } \textit{hovedformelen} \end{array}$$

Vi vil nå få at like δ-formler i forskjellige grener introduserer det samme Skolemsymbolet. Se på følgende eksempel (der vi ikke viser γ-kopiene).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\text{R}\forall \qquad \dfrac{\dfrac{Qu \vdash Pa, Qb}{Qu \vdash \forall x Px, Qb}\,\text{R}\forall}{Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\text{R}\forall}{Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\text{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\text{L}\forall$$

Vi ser her at den øverste R$\forall$-slutningen i høyre gren introduserer den *samme* Skolemkonstanten som R$\forall$-slutningen i venstre gren, siden hovedformlene i de to slutningene er *like*. Sammenligner vi den nederste R$\forall$-slutningen i høyre gren med R$\forall$-slutningen i venstre gren ser vi at de introduserte Skolemkonstantene er *ulike*, siden hovedformlene er *ulike*.

Oppgave 8 Er definisjon (IV) av δ-reglene *sunn*? Hvorfor/hvorfor ikke? (Hint: I definisjon (IV) legger vi en begrensning på gjenbruken av Skolemsymboler i forhold til definisjon (III). Hvordan påvirker dette sunnhetsbeviset? Kan vi bruke en egenskap ved funksjonen sko til å få sunnhetsbeviset til å gå gjennom?)

Definisjon 0.2 (Funksjonen sko*)**.** *La sko* være en funksjon fra δ-formler til Skolemsymboler slik at for to δ-formler φ og ψ så har vi sko$^*(\varphi)$ = sko$^*(\psi)$ hvis og bare hvis φ og ψ er like* opp til omdøping av frie og bundne variable.

Med omdøping av frie variable mener vi at vi kan endre navn på en eller flere bundne variable. Hvis vi f.eks. omdøper x til z i formelen (1) $\exists x Pxy$ får vi formelen $\exists z Pzy$. På samme måte kan vi omdøpe frie variable. Hvis vi omdøper y til z i formelen (1) over, så får vi formelen $\exists x Pxz$. Vi krever imidlertid at ingen frie variable skal bli bundet som følge av en slik variabelomdøping. For formelen (1) over er derfor ikke en omdøping av x til y tillat, siden vi da får formelen $\exists y Pyy$, som semantisk sett er *ulik* formelen vi startet med.

To formler φ og ψ defineres som like opp til omdøping av frie og bundne variable hvis vi kan omdøpe variablene i φ på en slik måte at resultatformelen blir syntaktisk lik ψ (eller tilsvarende, hvis vi kan omdøpe variablene ψ slik at resultatet blir syntaktisk likt φ). Formlene $\exists x Pxy$ og $\exists y Pyx$ er like opp til omdøping av frie og bundne variable, mens formlene $\exists x Pxy$ og $\exists x Pxx$ *ikke* er det.

Vi definerer så en variant av δ-betingelsen (IV) som følger.

$$\text{(V)} \qquad \begin{array}{l} - \ f = \text{sko}^*(\psi) \text{ der } \psi \text{ er hovedformelen} \\ - \ \vec{u} = u_1, \ldots, u_n \text{ er de variablene som forekommer fritt i } \textit{hovedformelen} \end{array}$$

Oppgave 9 Er definisjon (V) av δ-reglene *sunn*? Hvorfor/hvorfor ikke?