# INF3170 – Logikk

Ukeoppgaver – oppgavesett 8

**Oppgave 1** Strategier kan ha mye å si for størrelsen på bevis. Lag to strategier for utsagnslogisk **LK** som viser at det er slik. Finn eksempler på bevisbare sekventer hvor den ene strategien gir små bevis og den andre strategien gir store bevis. Hint: er det lurt å forgrene så for som mulig i et bevissøk, eller er det ikke det? Se på sekventen:

$$A \to B, B \to C \vdash A \to C$$

**Oppgave 2** Bevis eller finn motmodeller for følgende sekventer

1. $\forall x(Px \to Pfx) \vdash Pa \to Pffa$
2. $\forall x(Px \to \exists x Px)$
3. $\exists x(Px \to \exists x Px)$
4. $\forall x(Px \to \forall x Px)$
5. $\exists x(Px \to \forall x Px)$
6. $P \lor \forall x \neg Qx \vdash \forall x(P \lor \neg Qx)$
7. $\forall x \forall y(Pxy \to Pyx), \forall x \exists y Pxy \vdash \forall x \exists y(Pxy \land Pyx)$
8. $\exists x(Px \lor Qx) \vdash \exists x Px \lor \exists x Qx$
9. $\exists x(Px \land Qx) \vdash \exists x Px \land \exists x Qx$
10. $\vdash \forall x \exists y \forall z \exists w(Rxy \to Rwz)$
11. $\forall x((Px \land Qx) \to Rx) \vdash \forall x(Px \to Rx) \lor \forall x(Qx \to Rx)$

**Oppgave 3** Vis at **LK** er **sunn** hvis og bare hvis enhver oppfyllbar mengde $\Gamma$ er konsistent.

**Oppgave 4** La $\Gamma$ være en mengde formler. La $\varphi \in \Gamma$. Vi sier at $\varphi$ er *uavhengig* av de andre formlene i $\Gamma$, hvis det er slik at $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \varphi$.

**(1)** $\forall x \forall y \forall z(Rxy \land Rxz \to Rxz)$

**(2)** $\forall x \forall y(Rxy \to Ryx)$

**(3)** $\forall x Rxx$

**(1)**, **(2)** og **(3)** aksiomatiserer en ekvivalensrelasjon. Vis at alle tre er uavgengig av hverandre. (Hint: bruk sunnhetsteoremet.)

**Oppgave 5** Anta at vi har en lukket formel $\forall x\varphi$ og at $a$ er en parameter som ikke forkommer i $\forall x\varphi$.

- Vis at $\forall x\varphi$ er falsifiserbar hvis og bare hvis $\varphi[a/x]$ er falsifiserbar.
- Vis at $\forall x\varphi$ er gyldig hvis og bare hvis $\varphi[a/x]$ er gyldig.

**Oppgave 6** Bruk en rettferdig strategi for LK til å undersøke gyldigheten av følgende sekventer:

- $\forall x\exists y Lxy \vdash \exists y\forall x Lxy$
- $\exists x\forall y Lxy \vdash \forall y\exists x Lxy$

Vis hvordan søkestrategien gir et bevis eller hvordan søkestrategien genererer et objekt utfra hvilket man kan konstruere en motmodell.

**Oppgave 7** La $\forall x\varphi$ være en formel og la $\mathcal{M}$ være en Herbrandmodell med domene lik Herbranduniverset til formelen. Vis at

- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ for alle termer $t \in |\mathcal{M}|$, og
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ for minst en term $t \in |\mathcal{M}|$.

**Oppgave 8** Vis at en formel $F$ på DNF er gyldig hvis og bare hvis enhver sti gjennom matrisen til $F$ inneholder en kobling.

**Oppgave 9** Vis at en matrise for en gyldig formel inneholder minst én positiv og minst én negativ klausul.

**Oppgave 10** Vis at en endelig mengde formler $\Gamma$ er oppfyllbar hvis og bare hvis den er konsistent.